

ENSI de Bourges

Maîtrise des Risques Industriels



Mélanges mathématiques pour la mécanique

Supmeca

le 25 mai 2009

La notion d'observateur pour les systèmes non linéaires

D. Boutat.

ENSI de Bourges, Institut PRISME

Forme Compagnon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -p_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & -p_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -p_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$P_A(X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} p_i X^i$$

$\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique.

$$Ae_i = e_{i+1} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n-1$$

On dit qu'elle est cyclique.

$$Ae_n = -p_0 e_1 - p_1 e_2 - \dots - p_{n-1} e_n$$

Forme Compagnon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -p_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & -p_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -p_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$P_A(X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} p_i X^i$$

$$C_0 = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1)$$

$$C_0 A = (0 \ 0 \ \dots \ 1 \ -p_{n-1})$$

$$C_0 A^{n-1} = (1 \ * \ \dots \ * \ *)$$

$$\theta = \begin{pmatrix} C_0 \\ C_0 A \\ \dots \\ \dots \\ C_0 A^{n-1} \end{pmatrix} \text{ rang } n$$

$$C_0 A^k e_1 = 0 \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n-2$$

$$C_0 A^{n-1} e_1 = 1$$

Ceci peut s'interpréter comme des dérivations!!!

Mise sous forme Compagnon

Soit une matrice $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$P_A(X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} p_i X^i$$

On dira qu'elle est cyclique s'il existe un vecteur $\tau_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que la famille de vecteur donnée par induction :

$$\tau_i = A\tau_{i-1} \quad \text{pour } i = 2 : n$$

est une base de $\mathbb{R}^n$. $\tau_i = A^{i-1}\tau_1$ pour $i = 2 : n$

$$A\tau_n = A^n\tau_1 = - \sum_{i=0}^{n-1} p_i \tau_i$$

Soit la matrice P formée des :

$$Pe_i = \tau_i \quad \text{pour } i = 1 : n$$

$$P^{-1}APe_i = e_{i+1} \quad \text{pour } i = 1 : n-1$$

Mise sous forme Compagnon

D'où la forme Compagnon

$$A_0 = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -p_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & -p_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -p_{n-1} \end{pmatrix}$$

Dualité : soit la matrice C (forme linéaire) $1 \times n$

$$Ker C = eng\{\tau_1, \dots, \tau_{n-1}\} \quad \text{et} \quad C\tau_n = 1 \quad \begin{cases} CA^k \tau_1 = C\tau_{k+1} = 0 & 0 \leq k \leq n-2 \\ CA^{n-1} \tau_1 = C\tau_n = 1 \end{cases}$$

$$\theta = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{rang } n \quad \Lambda = \theta(\tau) \quad P^{-1} = \omega = \Lambda^{-1}\theta$$

Une dernière chose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -p_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & -p_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -p_{n-1} \end{pmatrix}$$

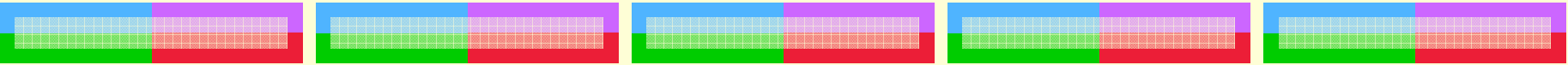
$$P_A(X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} p_i X^i$$

$$K = \begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ \dots \\ \dots \\ k_{n-1} \end{pmatrix} \quad C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$KC_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & k_0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & k_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$A + KC_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & k_0 - p_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & k_1 - p_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & k_{n-1} - p_{n-1} \end{pmatrix}$$

On peut opérer sur le spectre !!!



Le plan de l'exposé

- Notion d'observateur
- Observateur avec erreur linéaire
- Notion d'observabilité
- Les systèmes dynamiques dont l'erreur d'observation est linéaire
 - ❖ Théorème de Krener et Isidori.
 - ❖ Théorème de Krener et Respondek.
 - ❖ Théorème géométrique de l'immersion.
 - ❖ Théorème de Fliess et Kupka. ([Finiteness criterion for nonlinear input-output differential systems. SIAM J. Control Optim, 21 :1983, 721–728.](#))

Observateur

$$\dot{x} = f(x, u)$$

Système réel

$$y = h(x)$$

mesure : sortie

$$x(t_0) \approx \hat{x}(t_0)$$

$$\dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}, u)$$

Observateur

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

$\hat{x}(t)$ est un estimé asymptotique de $x(t)$

Observateur avec erreur linéaire

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

est régie par équation différentielle
linéaire :

$$\dot{e} = Ae$$

Spectre à partie réelle négative

$$\dot{x} = f(x, u)$$

Système réel

$$y = h(x)$$

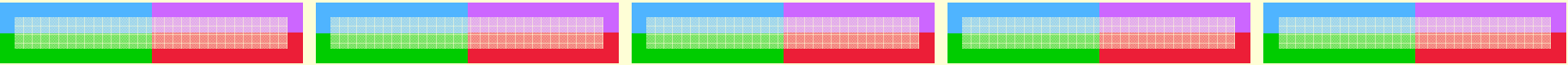
mesure : sortie

$$\dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}, u)$$

Observateur

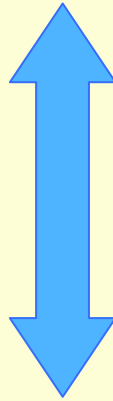
$$\hat{x}$$

$\hat{x}(t)$ est un estimé asymptotique $x(t)$



Observabilité

Les variables d'états du système



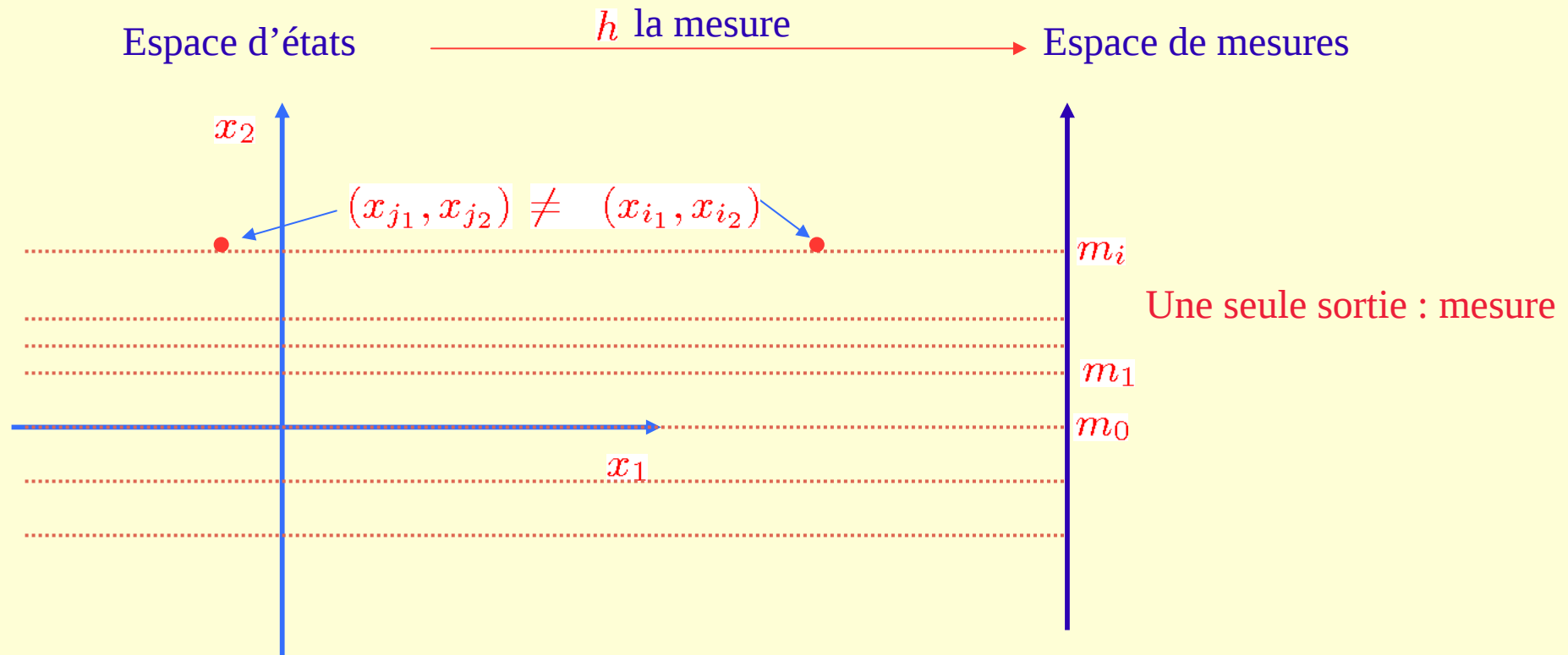
Correspondance bijective

Les mesures et tous ce l'on peut déduire d'elles

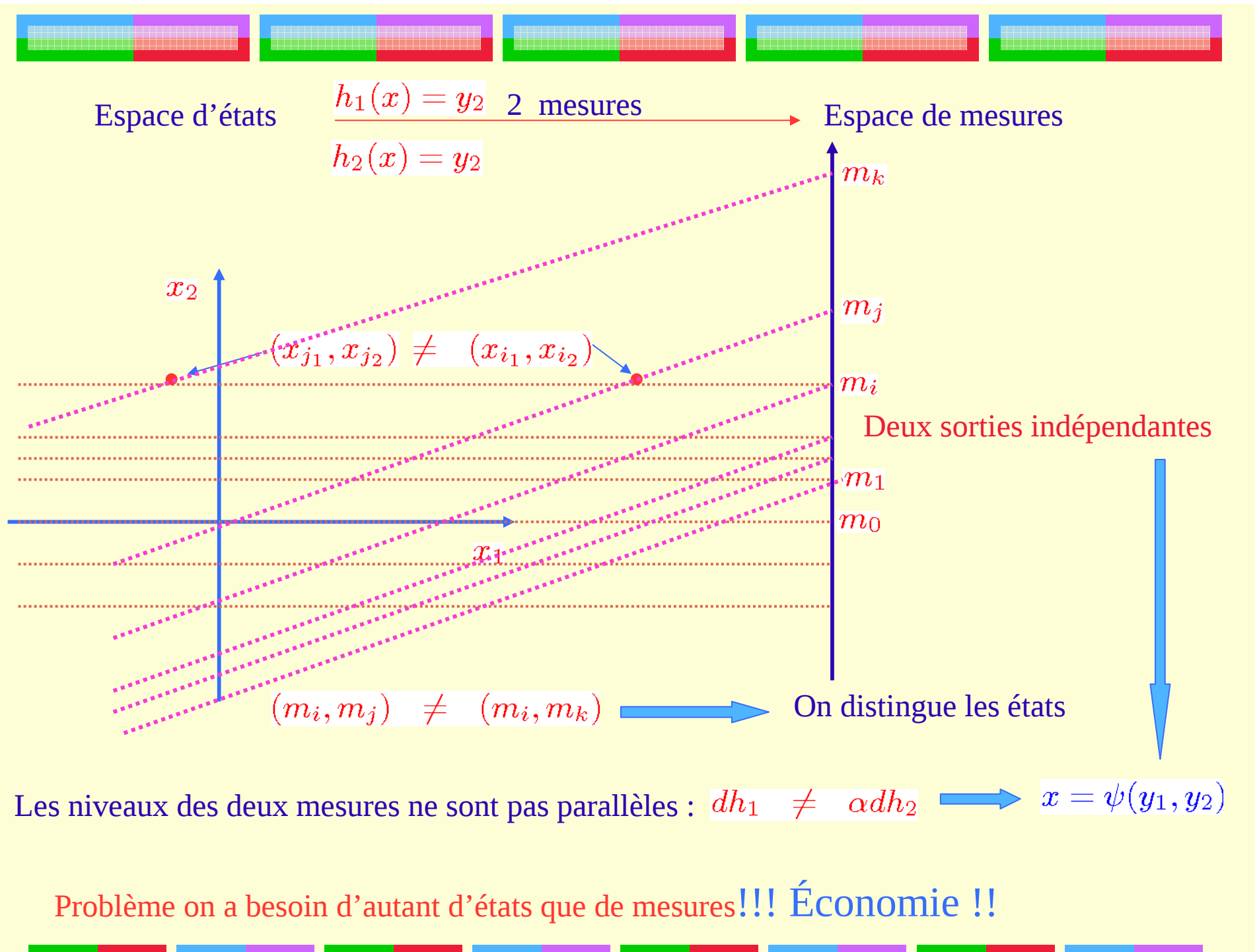
Reproduire l'état à partir de la sortie

$$x = \phi(y, \dot{y}, \dots)$$


Observabilité : sans dynamique

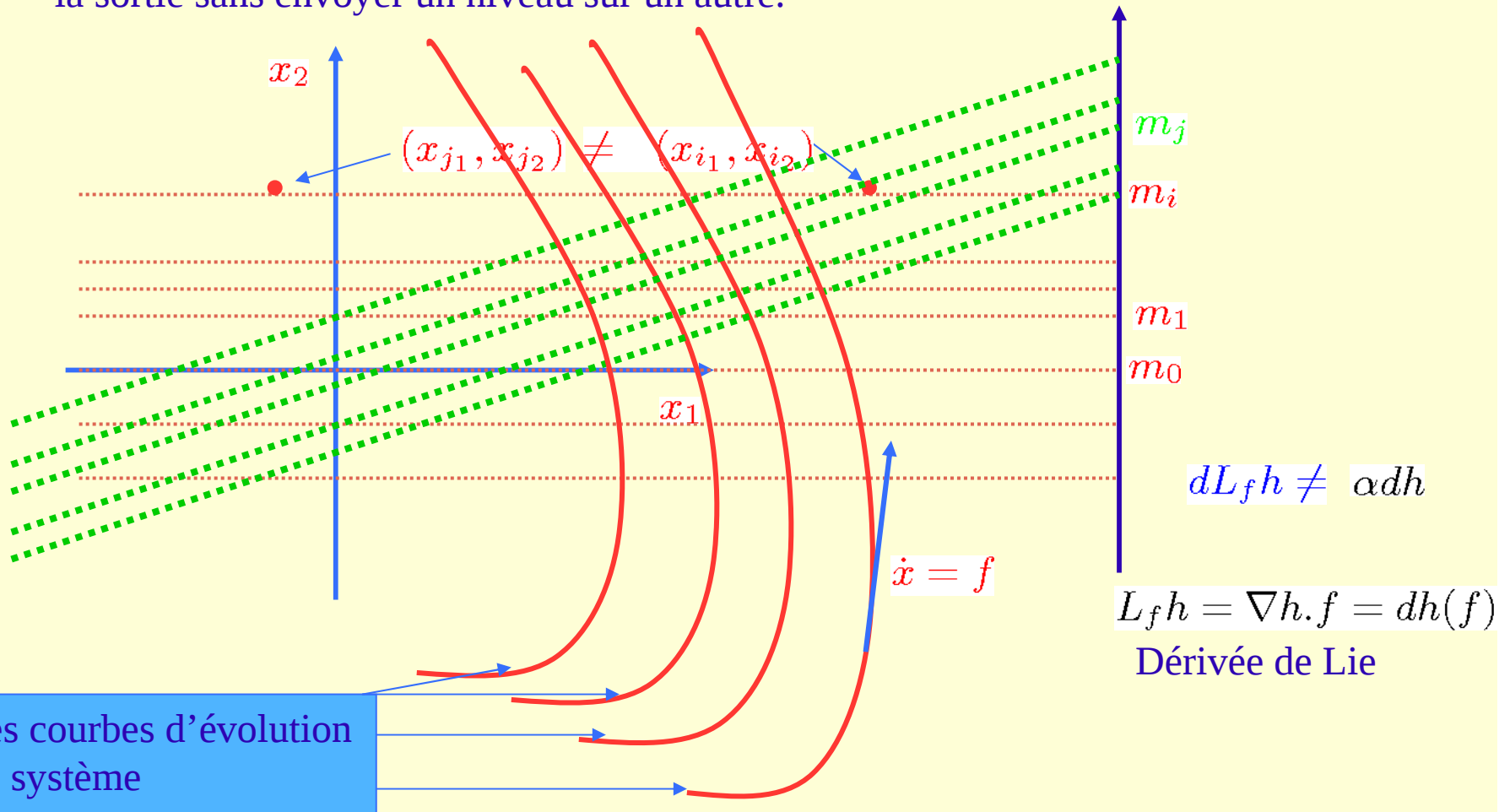


A chaque valeur de la mesure correspond plusieurs états :
problème on ne distingue pas les états.



Une connaissance (de l'évolution) du modèle du système peut elle diminuer le nombre de mesures?

1) **Cas favorable** : dynamique du système transverse aux courbes de niveaux de la sortie sans envoyer un niveau sur un autre.

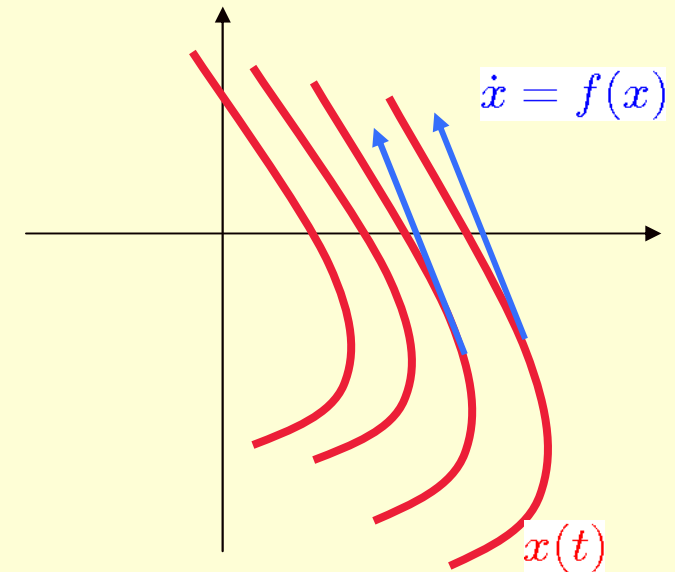


Dérivée de Lie

Un champs de vecteurs :

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

Dynamique :



$$f(x) = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

Dérivation:

$$L_f h = f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + \dots + f_n \frac{\partial h}{\partial x_n}$$

Linéaire:

h une fonction

$$\begin{cases} f(x) = Ax \\ h(x) = Cx \end{cases}$$

$$L_f(h) = L_{Ax} Cx = CAx$$

$$L_f^2(h) = L_{Ax}^2 Cx = CA^2x$$

$$L_f(h) = \nabla h \cdot f = dh(f) = \frac{y}{dt} = \dot{y}$$

$$y(t) = h(x(t))$$

Observabilité au sens du rang

On considère un système dynamique avec une sortie :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases}$$

On dit qu'il est observable au sens du rang si :

$$\theta = \begin{pmatrix} dh \\ dL_f h \\ dL_f^2 h \\ \vdots \\ dL_f^{n-1} h \end{pmatrix} \text{ est de rang } n$$

Localement on le difféomorphisme suivant :

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ y^{(2)} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$\theta = d\phi$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$$

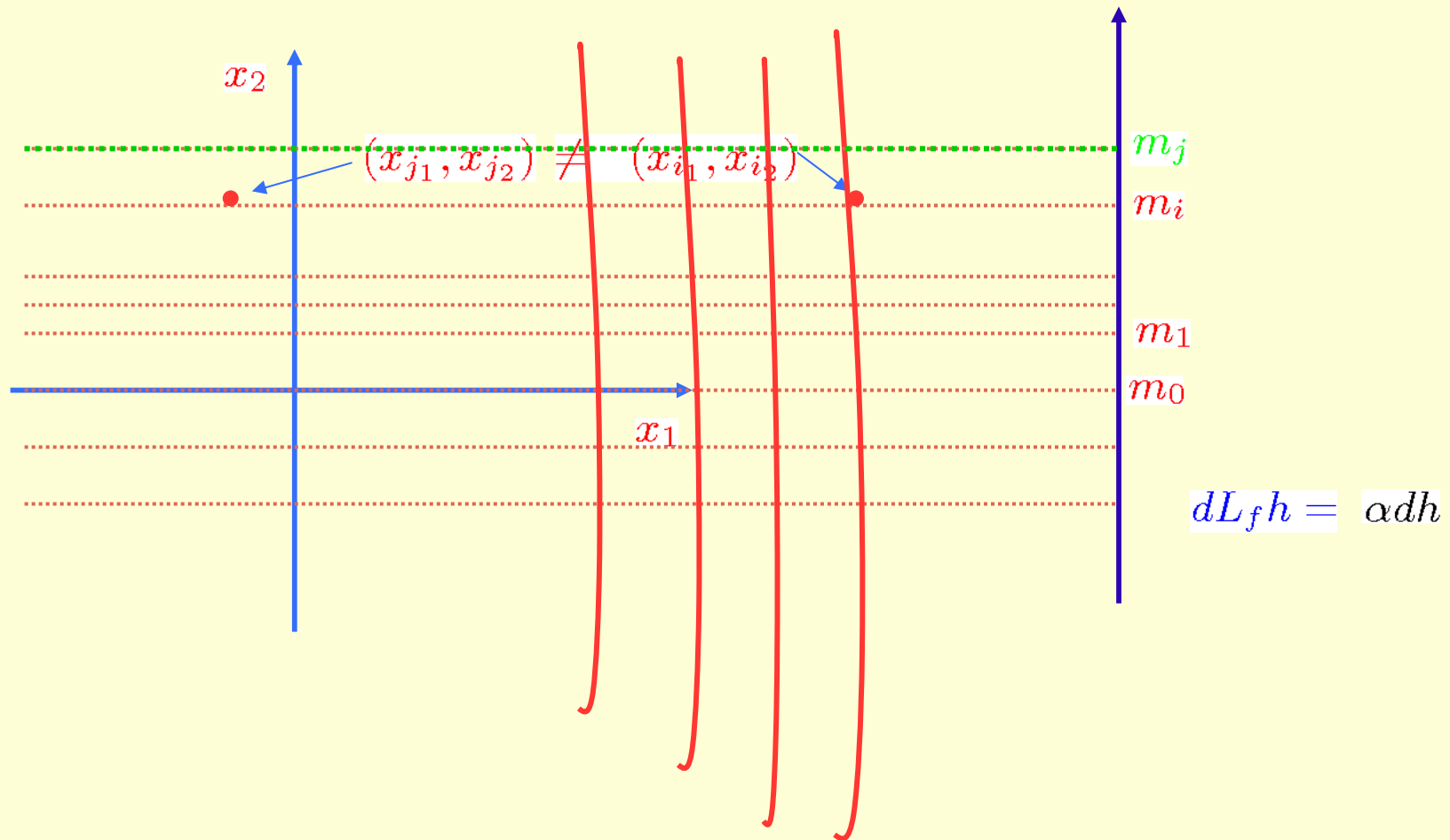
$$\theta = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$x = \theta^{-1} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ y^{(2)} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$\theta = d\phi = \phi$$

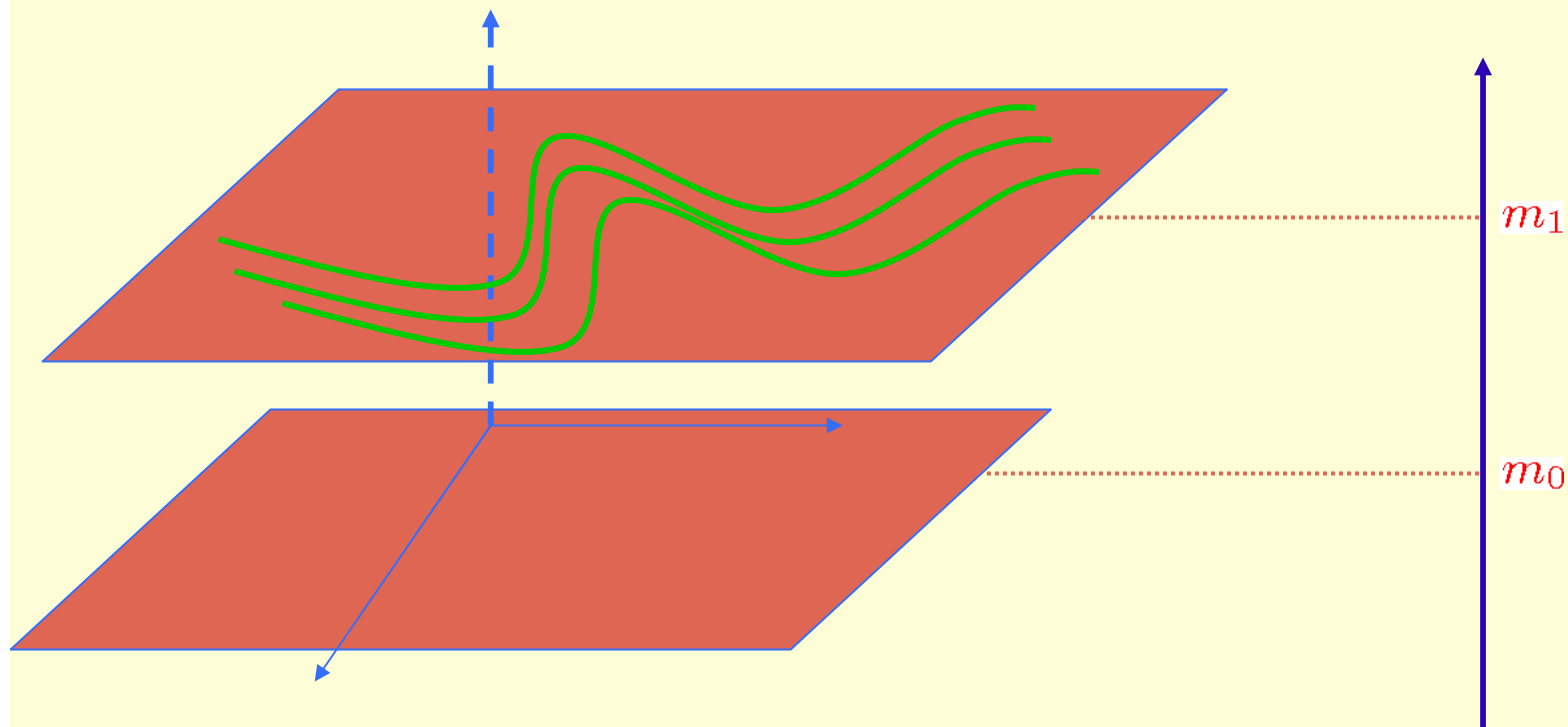
Une connaissance (de l'évolution) du modèle du système peut elle diminuer le nombre de mesures

1) **Cas défavorables** : dynamique du système envoie une des courbes sur l'autre.



Une connaissance (de l'évolution) du modèle du système peut elle diminuer le nombre de mesures

1) **Cas défavorables** : dynamique du système n'est pas transverse à l'une des courbes de niveaux



La mesure « ignore » l'évolution du système

Exemple fondamental : observabilité

On considère dans $\mathbb{R}^n$ la dynamique suivante :

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \frac{dz}{dt} := \dot{z} = A_0 z$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 0 \\ \dot{z}_2 = z_1 \\ \dot{z}_3 = z_2 \\ \dots = \dots \\ \dot{z}_n = z_{n-1} \end{cases}$$

$$y = z_n = C_0 z$$

avec $y = z_n$ et on a :

Toutes les variables z_j s'écrivent en fonction de y et ses dérivées successives $y^{(i)}$

$z_n = y$	$z_n = C_0 z$
$z_{n-1} = \dot{y}$	$z_{n-1} = C_0 A_0 z$
$z_{n-2} = y^{(2)}$	$z_{n-2} = C_0 A_0^2 z$
$z_{n-i} = y^{(i)}$	$z_{n-i} = C_0 A_0^i z$

Exemple fondamental : observabilité

On considère dans $\mathbb{R}^n$ la dynamique suivante :

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \frac{dz}{dt} := \dot{z} = A_0 z$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$z_n = y$	$z_n = C_0 z$
$z_{n-1} = \dot{y}$	$z_{n-1} = C_0 A_0 z$
$z_{n-2} = y^{(2)}$	$z_{n-2} = C_0 A_0^2 z$
$z_{n-i} = y^{(i)}$	$z_{n-i} = C_0 A_0^i z$

$$\theta = \begin{pmatrix} C_0 \\ C_0 A_0 \\ \dots \\ \dots \\ C_0 A_0^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\theta(z) = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \dots \\ \dots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

observable

$$z = \theta^{-1} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \dots \\ \dots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Exemple fondamental : observateur

On considère dans $\mathbb{R}^n$ la dynamique suivante :

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\frac{dz}{dt} := \dot{z} = A_0 z$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observateur de Luenberger

$$\dot{\hat{z}} = A_0 \hat{z} + K(y - \hat{y})$$

une copie de la dynamique

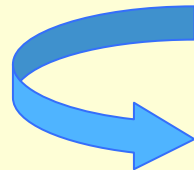
terme correctif

$$K = \begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ k_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$y = C_0 z$$

$$\hat{y} = C_0 \hat{z}$$

L'erreur $e(t) := z - \hat{z}$



$$\frac{de(t)}{dt} := \dot{e} = (A_0 - KC_0)e$$

Observateur avec la dynamique de l'erreur linéaire

- Forme Canonique (Brunovsky) Non Linéaire

$$\begin{cases} \dot{z} = A_0 z + \beta(y) \\ y = C_0 z = z_n \end{cases} \quad \text{même non dérivable}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_0 = (0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1)$$

$$z_i = \dot{z}_{i+1} - \beta_{i+1}(y)$$

Les états s'obtiennent par dérivations successives.

- Observateur (Luenberger)

$$\dot{\hat{z}} = A_0 \hat{z} + \beta(\hat{y}) + K(y - \hat{y})$$

- Dynamique de l'erreur

$$e = z - \hat{z}$$

$$\dot{e} = (A_0 - KC_0)e$$

$$KC_0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & k_0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & k_1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & k_{n-1} \end{pmatrix}$$

Système linéaire quelconque

On considère dans $\mathbb{R}^n$ la dynamique suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$$

$$\theta = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \text{ de rang } n$$

$$\theta(z) = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

observable

$$z = \theta^{-1} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

On calcule τ_1

$$\begin{cases} CA^k \tau_1 = 0 & 0 \leq k \leq n-2 \\ CA^{n-1} \tau_1 = 1 \end{cases}$$

$$\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_n\} \text{ base}$$

Puis par induction $\tau_i = A\tau_{i-1}$

Systeme linéaire mise sous forme normale

On considère dans $\mathbb{R}^n$ la dynamique suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$$

$$\theta = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} CA^i \tau_1 = 0 \quad \text{pour } i = 0 : n-2 \\ CA^{n-1} \tau_1 = 1 \end{array} \right. \quad \left| \quad \tau_i = A \tau_{i-1} \quad \text{pour } i = 2 : n. \right.$$

Soient les matrices suivantes : $\Lambda = \theta(\tau) = \begin{bmatrix} \theta(\tau_1) & \dots & \dots & \dots & \theta(\tau_n) \end{bmatrix}$

$$\omega = \Lambda^{-1} \theta$$

Le changement de variables :

$$z = \omega x = (\Lambda^{-1} \theta) x$$



$$\begin{cases} \dot{z} = A_0 z + p y \\ y = C_0 z = z_n \end{cases}$$

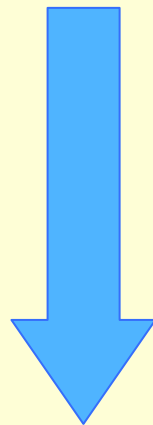
$$p = \begin{pmatrix} -p_0 \\ -p_1 \\ \dots \\ \dots \\ -p_{n-1} \end{pmatrix}$$

Les coefficients du poly. Cara.

Systemes non lineaires

- Systeme non lineaire mono sortie :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases}$$



Existe t-il un changement de coordonnees $z = \phi(x)$ explicites ?

$$\begin{cases} \dot{z} = A_0 z + \beta(y) \\ y = C_0 z \end{cases}$$

Le pont : linéaire \ non linéaires

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$$

$$\theta = \begin{pmatrix} dh \\ dL_f h \\ dL_f^2 h \\ \dots \\ dL_f^{n-1} h \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad \text{sur } U$$

Il existe un champ de vecteur τ_1 défini par :

$$\begin{cases} CA^i \tau_1 = 0 & \text{pour } i = 0 : n-2 \\ CA^{n-1} \tau_1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} dL_f^i h \tau_1 = 0 & \text{pour } i = 0 : n-2 \\ dL_f^{n-1} h \tau_1 = 1 \end{cases}$$

Par induction on obtient la base : $\tau = [\tau_1, \dots, \tau_n]$

??????

$$\tau_i = A\tau_{i-1} \quad \text{pour } i = 2 : n.$$

$$\tau_i = [\tau_{i-1}, f] \quad i = 2 : n$$

$$\Lambda = \theta[\tau_1, \dots, \tau_n] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & * & \dots & \dots \\ 1 & * & \dots & \dots & * \end{pmatrix}$$

$$\omega = \Lambda^{-1} \theta$$

Le pont : linéaire \ non linéaires

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad \text{sur } U$$

$$\Lambda = \theta[\tau_1, \dots, \tau_n] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & * & \dots & \dots \\ 1 & * & \dots & \dots & * \end{pmatrix}$$

Opère dans l'espace tangent.

$$\omega = \Lambda^{-1}\theta$$

$$\omega(\tau_i) = e_i = \frac{\partial}{\partial z_i}$$

Linéaire.

Non linéaire. $\omega = ? d\phi$

$$z = \omega x$$

Opère sur l'espace d'état (les points)

$$z = \phi(x)$$

Le pont : linéaire \ non linéaires

$$\begin{array}{ccc} TU & \xrightarrow{\Lambda^{-1}\theta := \omega} & TU \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{\exists \psi?} & U \end{array}$$

$\omega = d\psi$

$\int$ Problème d'intégration!

Un peu de géométrie différentielle

la dérivée de Lie d'une fonction h dans la direction de f_1

$$f_1 = \begin{pmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \\ f_{3,1} \\ \dots \\ f_{n,1} \end{pmatrix}$$

$$L_{f_1} h := dh(f_1) = f_{1,1} \frac{\partial h}{\partial x_1} + \dots + f_{n,1} \frac{\partial h}{\partial x_n}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} f_{1,2} \\ f_{2,2} \\ f_{3,2} \\ \dots \\ f_{n,2} \end{pmatrix}$$

Le crochet de Lie de f_1 par f_2

$$[f_1, f_2] = \begin{pmatrix} L_{f_1} f_{1,2} - L_{f_2} f_{1,1} \\ L_{f_1} f_{2,2} - L_{f_2} f_{2,1} \\ L_{f_1} f_{3,2} - L_{f_2} f_{3,1} \\ \dots \\ L_{f_1} f_{n,2} - L_{f_2} f_{n,1} \end{pmatrix}$$

Considérons comme une dérivation

$$L_{[f_1, f_2]} h = L_{f_1} L_{f_2} h - L_{f_2} L_{f_1} h$$

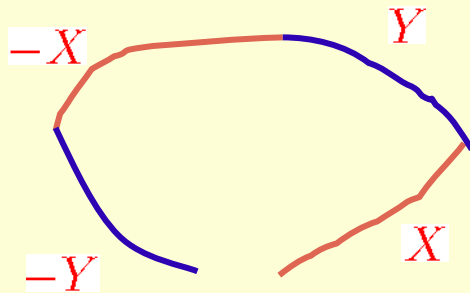
$$f_1 = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$f_2 = \frac{\partial}{\partial y}$$

$$L_{[f_1, f_2]} h = \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{Th. de Schwartz}$$

Un peu de géométrie différentielle

▶ $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0$



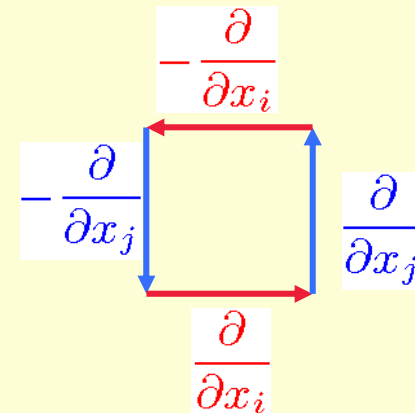
$[f_1, f_2] \neq 0$

Obstruction à l'existence du
difféomorphisme

$\omega(X) = \frac{\partial}{\partial x_i}$

$\omega(Y) = \frac{\partial}{\partial x_j}$

$\omega \neq d\phi$



$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0$

▶ $[A_1x, A_2x] = (A_2A_1 - A_1A_2)x$

▶ $[\tau_i, Ax] = A\tau_i$ τ_i Champ de vecteurs constant

▶ $[\tau_i, f(x)] = \tau_{i+1}$ $1 \leq i \leq n-1$ Construction du repère

Lemme d'intégrabilité

Considérer n formes linéairement indépendantes $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \dots \\ \omega_n \end{pmatrix} : TU \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

C'est un isomorphisme sur l'espace des champs de vecteurs

Considérer un repère $\tau = (\tau_1 \ \tau_2 \ \dots \ \tau_n)$ tels que :

$$\omega(\tau) = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \dots \\ \omega_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_n \end{pmatrix} = (\omega_i(\tau_j))_{1 \leq i, j \leq n}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Repère canonique

Lemme d'intégrabilité

Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $d\omega_i = 0$ pour $1 \leq i \leq n$

ii) $[\tau_i, \tau_j] = 0$ pour $1 \leq i, j \leq n$

iii) Il existe un changement de coordonnées (locale) ϕ tel que :

$$\omega = d\phi$$

iv) ω est un isomorphisme de l'algèbre de Lie

Démonstration

$$d\omega(\tau_i, \tau_j) = L_{\tau_i}(\omega(\tau_j)) - L_{\tau_j}(\omega(\tau_i)) - \omega([\tau_i, \tau_j])$$

comme $\omega(\tau_i) = \text{cst}$ et $\omega(\tau_j) = \text{cst}$

alors $d\omega(\tau_i, \tau_j) = -\omega([\tau_i, \tau_j])$

Théorème de mise sous la forme canonique non linéaire d'observabilité

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} \xrightarrow[\substack{\text{localement} \\ z = \phi(x) ?}]{\text{blue arrow}} \begin{cases} \dot{z} = A_0 z + \beta(y) \\ y = C_0 z = z_n \end{cases}$$

FCNO

À chaque système dynamique observable est associé naturellement un repère τ et un isomorphisme ω tels que :

$$\omega(\tau) = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \right) \quad \text{Repère canonique}$$

En outre on a : $\tau_{i+1} = [\tau_i, f]$

Théorème Krener & Isidori

Il existe ϕ si et seulement si $[\tau_i, \tau_j] = 0$
si et seulement si $d\omega_i = 0$

Démonstration

- Il reste à voir c'est quoi le transformé $\omega(f)$?

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \omega(f) = \left[\frac{\partial}{\partial z_i}, \omega(f) \right] = [\omega(\tau_i), \omega(f)]$$

Comme ω est intégrable on a :

$$= [\omega(\tau_i), \omega(f)] = \omega([\tau_i, f]) = \omega(\tau_{i+1}) = \frac{\partial}{\partial z_{i+1}}$$

D'où

$$\omega(f) = z_1 \frac{\partial}{\partial z_2} + \dots + z_{n-1} \frac{\partial}{\partial z_n} + \beta(z_n)$$

Exemple 1

On considère le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = x_2 \\ y = x_3 \end{cases}$$

Les 1-formes d'observabilité sont données par :

$$\theta_1 = dx_3 \quad \theta_2 = dx_2 \quad \theta_3 = dx_1$$

Le repère de KI est donné par :

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1} & \tau_2 &= \frac{\partial}{\partial x_2} & \tau_3 &= \frac{\partial}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \end{aligned} \right\} \longrightarrow [\tau_i, \tau_j] = 0$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x_3 \end{pmatrix}, \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} -x_3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \omega = \Lambda^{-1} \theta = \begin{pmatrix} dx_1 - x_3 dx_3 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

$$d\omega = 0$$

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} z_1 = x_1 - \frac{1}{2} x_3^2 \\ z_2 = x_2 \\ z_3 = x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 0 \\ \dot{z}_2 = z_1 \\ \dot{z}_3 = z_2 \\ y = z_3 \end{cases}$$

Exemple 2

On considère le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ y = \sin x_2 \end{cases}$$

Les 1-formes d'observabilité sont données par :

$$\theta_1 = \cos x_2 dx_2 \quad \theta_2 = \cos x_2 dx_1 - x_1 \sin x_2 dx_2$$

Le repère de KI est donné par :

$$\tau_1 = \frac{1}{\cos x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \tau_2 = \frac{1}{\cos x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{\cos x_2} (x_2 - x_1 \tan x_2) \frac{\partial}{\partial x_1}$$

mais

$$[\tau_1, \tau_2] = -2 \frac{1}{\cos^2 x_2} \tan x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \neq 0$$

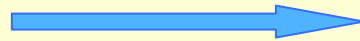
$$\tau_1^1 = l(y) \tau_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \tau_2^1 = [\tau_1^1, f] = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \quad [\tau_1^1, \tau_2^1] = 0$$

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & l \\ l & x_2 \cos x_2 - x_1 \sin x_2 \end{pmatrix} \quad \omega_1 = \begin{pmatrix} dx_1 - x_2 dx_2 \\ dx_2 \end{pmatrix}$$

$$d\omega_1 = 0$$



$$\begin{pmatrix} z_1 = x_1 - \frac{1}{2} x_2^2 \\ z_2 = x_2 \end{pmatrix}$$



$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 0 \\ \dot{z}_2 = z_1 \\ \tilde{y} = z_2 = \arcsin(y) \end{cases}$$

Forme canonique non linéaire avec difféomorphisme sur la sortie

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} \xrightarrow[\substack{\text{localement} \\ z = \phi(x) ?}]{\text{}} \begin{cases} \dot{z} = Az + \beta(\tilde{y}) \\ \tilde{y} = z_n = \psi(y) \end{cases} \quad \text{FCNODS}$$

On considère le repère de KI et on regarde les relations suivantes :

$$n \text{ pair} \quad [\tau_1, \tau_k] = 0 \quad k = 2 : n-1 \quad \text{et} \quad [\tau_1, \tau_n] = \alpha(y)\tau_1$$

$$n \text{ impair} \quad [\tau_1, \tau_n] = [\tau_j, \tau_k] = 0 \quad j = 1 : 2 \quad \text{et} \quad k = 2 : n-1 \quad \text{et} \quad ([\tau_2, \tau_n] - \alpha(y)\tau_2) \in \text{eng} \tau_1$$

→ Difféomorphisme $\psi(y)$

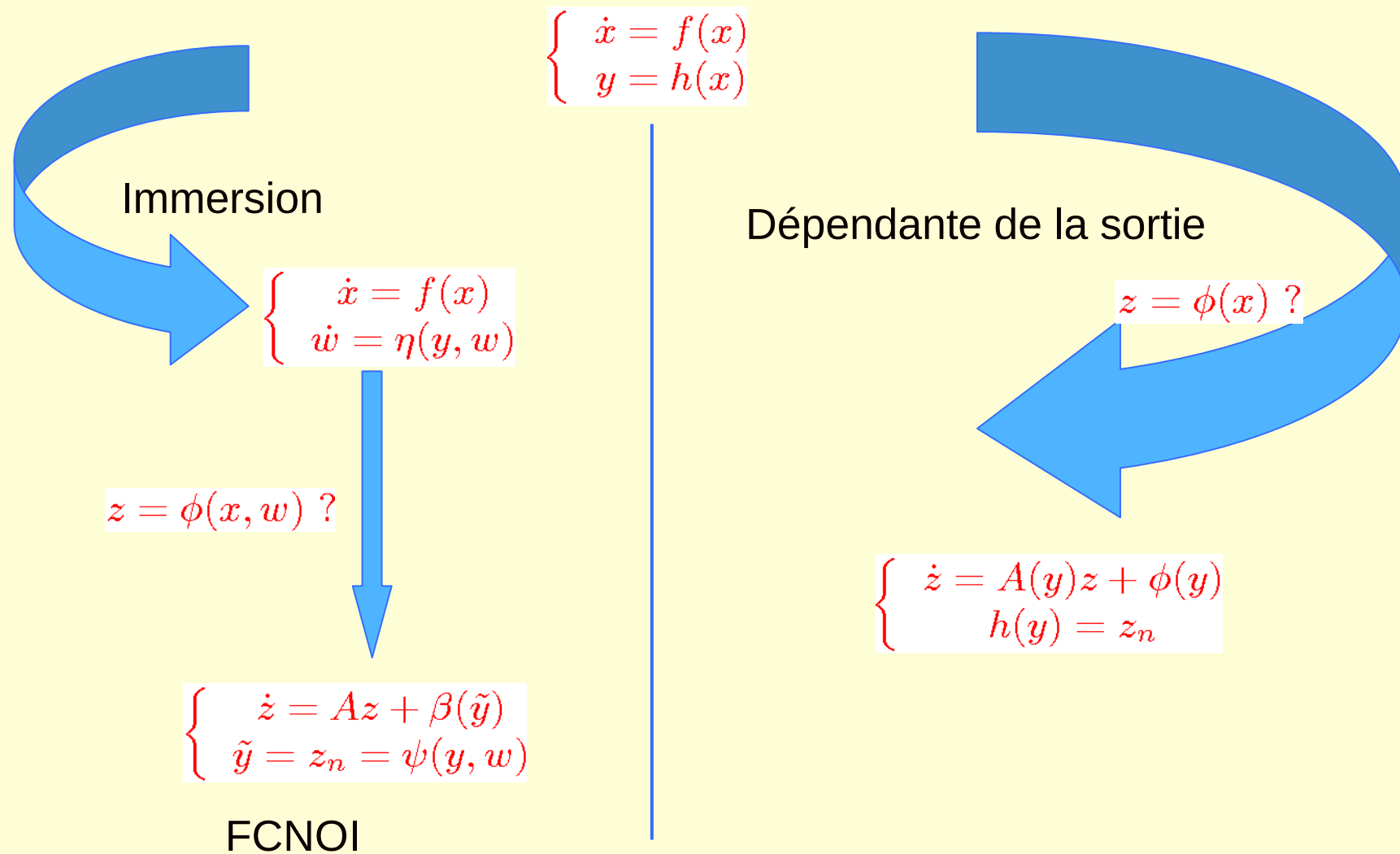
$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ \tilde{y} = \tilde{h}(x) = \psi(y) \end{cases}$$

Théorème Krener & Respondek

Système (1) se met sous la forme FCNODS si et seulement si

(2) se met sous la forme FCNO KI

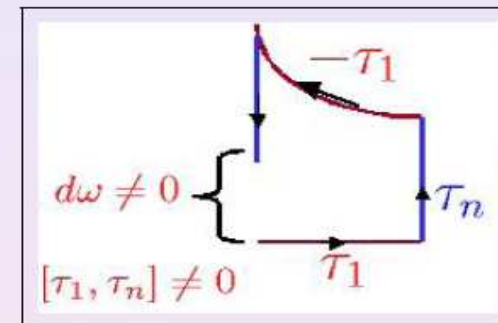
Forme canonique non linéaire



pour n pair

$$[\tau_1, \tau_k] = 0 \text{ pour } 1 \leq k \leq n-1$$

$$[\tau_1, \tau_n] = \alpha(y)\tau_1$$

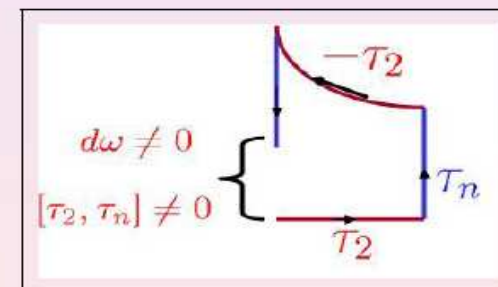


pour n impair

$$[\tau_1, \tau_k] = 0 \text{ pour } 1 \leq k \leq n$$

$$[\tau_2, \tau_k] = 0 \text{ pour } 1 \leq k \leq n-1$$

$$([\tau_2, \tau_n] - \alpha(y)\tau_2) \in \text{eng}\{\tau_1\}.$$



Difféomorphisme $\psi(y)$

$$(2) \begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ \tilde{y} = \tilde{h}(x) = \psi(y) \end{cases}$$

$$\tau_1^1 = l(y)\tau_1 \text{ avec } \psi'(y) = \frac{1}{l(y)}$$

$$\tau_i^1 = [\tau_{i-1}^1, f] \text{ pour } i = 2 : n$$

S'ils commutent alors on a théorème KR. Sinon on pose $\tau_i = \tau_i^1$

Si le repère $\{\tau_i\}_{1 \leq i \leq n}$ n'est pas commutatif et si :

- pour n impair

$$[\tau_1, \tau_k] = 0 \text{ pour } 1 \leq k \leq n$$

$$[\tau_2, \tau_n] = \alpha(y)\tau_1$$

- pour n pair

$$[\tau_1, \tau_k] = 0 \text{ pour } 1 \leq k \leq n$$

$$[\tau_2, \tau_k] = 0 \text{ pour } 1 \leq k \leq n$$

$$([\tau_3, \tau_n] - \alpha(y)\tau_2) \in \text{eng}\{\tau_1\}$$

Une équation différentielle qui permet de déterminer une fonction $l(w)$ de la variable auxiliaire w . Puis on construit la famille (le repère) suivant :

$$\tau_1^1 = l(w)\tau_1 \quad \tau_i^1 = [\tau_{i-1}^1, F] \quad \text{pour } i = 2 : n$$

$$T_{n+1}$$

$$T_{n+1} = [\tau_n, F]?$$

Théorème d'immersion

Si le nouveau repère commute :

$$[\tau_i^1, \tau_j^1] = 0 \quad [\tau_i^1, T_{n+1}] = 0$$

alors il existe $z = \phi(x, w)$ qui transforme $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ \dot{w} = \eta(y, w) \end{cases}$

en

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \beta(\tilde{y}) \\ \tilde{y} = z_n = \psi(y, w) \end{cases}$$

Exemple immersion

On considère le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = x_2 \\ y = x_2 \end{cases}$$

Les 1-formes d'observabilité sont données par :

$$\theta_1 = dx_3 \quad \theta_2 = dx_2 \quad \theta_3 = dx_1$$

Le repère de KI est donné par :

$$\tau_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \tau_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \tau_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} + (x_3^2 - x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$[\tau_2, \tau_3] = -2 \frac{\partial}{\partial x_1} = -2\tau_1 \neq 0$$

$$\dot{w} = y$$

$$\tau_1^2 = l(w)\tau_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \tau_2^2 = \left[\tau_1^1, f + x_3 \frac{\partial}{\partial w} \right] = l(w)\tau_2 - x_3 l'(w)\tau_1$$

$$\tau_3^2 = l(w)\tau_3 - 2x_3 l'(w)\tau_2 + (x_2 l'(w) + x_3^2 l''(w))\tau_1$$

$$[\tau_2^2, \tau_3^2] = (-2l^2 + 2ll')\tau_1 = 0$$

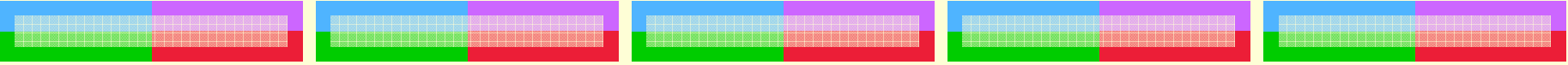
$$l(w) = e^w$$

$$z_3 = e^{-w} x_3$$

$$z_2 = e^{-w} x_2 + \frac{1}{2} e^{-w} x_3^2$$

$$z_1 = e^{-w} x_1$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 0 \\ \dot{z}_2 = z_1 - \frac{1}{2} e^{2w} z_3^3 \\ \dot{z}_3 = z_2 - \frac{3}{2} e^w z_3^2 \\ \dot{w} = e^w z_3 \end{cases}$$



Merci à Monsieur
Dugowson Stéphane
pour l'organisation de cette
journée.



ENSI de Bourges

Maîtrise des Risques Industriels



Mélanges mathématiques pour la mécanique

Supmeca

le 25 mai 2009

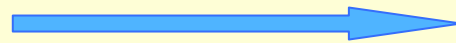
Système dynamique sous forme Compagnon

On considère dans $\mathbb{R}^n$ la dynamique suivante :

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \frac{dz}{dt} := \dot{z} = A_0 z$$
$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -p_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & -p_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -p_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -p_0 y \\ \dot{z}_2 = z_1 - p_1 y \\ \dot{z}_3 = z_2 - p_2 y \\ \vdots \\ \dot{z}_n = z_{n-1} - p_{n-1} y \end{cases}$$

avec $y = z_n$ et on a :



$$z_{n-1} = \dot{y} + p_{n-1} y$$

$$z_{n-2} = y^{(2)} + p_{n-2} y$$

$$z_{n-i} = y^{(i)} + p_{n-i} y$$

Toutes les variables z_j s'écrivent en fonction de y et ses dérivées successives $y^{(i)}$

Système dynamique sous forme Compagnon

On considère dans $\mathbb{R}^n$ la dynamique suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & \dots & c_n \end{pmatrix}$$

Problème : a-t-on $x = F(y, y^{(i)})$?

$$\begin{cases} y = Cx \\ \dot{y} = CAx \\ y^{(2)} = CA^2x \\ \dots = \dots \\ y^{(n-1)} = CA^{n-1}x \\ y^{(n)} = CA^nx \\ \dots = \dots \end{cases}$$

On s'arrête : théorème de Cayley-Hamilton

$$x = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ y^{(2)} \\ \dots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Si inversible

Systèmes dynamiques linéaires modulo la sortie

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \psi(y, u) \\ y = h(x) = Cx \end{cases} \quad \text{même non dérivable}$$

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$$

Polynôme caractéristique

$$P_A(\xi) = \xi^n + p_{n-1}\xi^{n-1} + \dots + p_1\xi + p_0 \quad \text{le théorème de Cayley-Hamilton} \quad P_A(A) = 0$$

Le changement de coordonnées

$$z_n = Cx \quad \longrightarrow \quad \dot{z}_n = CAx + C\psi(y, u) = z_{n-1} - p_{n-1}y + \Phi_n(y, u)$$

$$z_{n-1} = CAx + p_{n-1}Cx \quad \longrightarrow \quad \dot{z}_{n-1} = z_{n-2} - p_{n-2}y + \Phi_{n-1}(y, u)$$

$$z_{n-2} = CA^2x + p_{n-1}CAx + p_{n-2}Cx$$

$$z_{n-k} = CA^kx + p_{n-1}CA^{k-1}x + p_{n-2}CA^{k-2}x + \dots + p_{n-k}Cx \quad 1 \leq k \leq n-1$$

$$z_1 = CA^{n-1}x + p_{n-1}CA^{n-2}x + p_{n-2}CA^{n-3}x + \dots + p_1Cx$$

$$\dot{z}_1 = CA^n x + p_{n-1}CA^{n-1}x + p_{n-2}CA^{n-2}x + \dots + p_1CAx + \Phi_1(y, u)$$

$$= -p_0y + \Phi_1(y, u)$$

$$\begin{cases} \dot{z} = A_0z + \beta(y, u) \\ y = z_n \end{cases}$$

Système dynamique sous forme Compagnon

On appelle matrice d'observabilité d'un système dynamique

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax \\ y &= Cx \end{cases}$$

La matrice

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

On dit que le système dynamique est observable si : $x = \mathcal{O}^{-1}$

$$\text{Rang}(\mathcal{O}) = n$$

$$\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ y^{(2)} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Proposition :

A isomorphisme près tous les systèmes dynamiques observables sont compagnon

$$\begin{cases} \dot{z} &= A_0 z \\ y &= C_0 z = z_n \end{cases}$$

Observateur à grand gains

Forme dépendante de la sortie

$$\begin{cases} \dot{z} = A_{0d}(y, u)z + \beta(y, u) \\ y = C_0 z = z_n \end{cases}$$

$$z_i = \frac{1}{\alpha_i} (\dot{z}_{i+1} - \beta_{i+1}(y, u))$$

$$A_{0d}(y, u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1(y, u) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2(y, u) & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{n-1}(y, u) & 0 \end{pmatrix}$$

Observateur associée

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}} &= A_{0d}\hat{z} + \phi(y, u) + \mathcal{D}^{-1}P_\rho^{-1}C_0^T(y - C_0\hat{z}), \\ 0 &= \rho P_\rho + A_{0d}^T P_\rho + P_\rho A_{0d} - C_0^T C_0, \end{aligned}$$

Dynamique de l'erreur

$$A_{0d}(y, u) = \mathcal{D}^{-1}A_0\mathcal{D}$$

$$e = z - \hat{z}$$

$$\tilde{e} = \mathcal{D}\Delta e$$

$$\dot{\tilde{e}} = \rho(A_0 - P^{-1}C^T C)\tilde{e} + \dot{\mathcal{D}}\mathcal{D}^{-1}\tilde{e}$$

$$\Delta = \text{diag} \left[\frac{1}{\rho^{n-1}}, \frac{1}{\rho^{n-2}}, \dots, \frac{1}{\rho}, 1 \right]$$

$$\mathcal{D} = \text{diag} \left[\prod_{k=1}^{n-1} \alpha_i, \prod_{k=2}^{n-1} \alpha_i, \dots, \alpha_{n-1}, 1 \right]$$

$$P_\rho(k, j) = \frac{(-1)^{k+j} C_{2n-k-j}^{n-j}}{\rho^{2n+2-k-j}}, \quad 1 \leq k \leq j \leq n,$$

Systèmes dynamiques linéaires modulo la sortie

● Matrice cyclique

On cherche un (champ) vecteur τ_1 qui satisfait à :

$$\begin{cases} CA^i \tau_1 = 0 & \text{pour } i = 0 : n-2 \\ CA^{n-1} \tau_1 = 1 \end{cases}$$

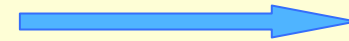
puis on construit par induction des vecteurs τ_i par :

$$\tau_i = A\tau_{i-1} \quad \text{pour } i = 2 : n.$$

Avec $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ est une base.

$$\Lambda = \mathcal{O}\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & l_{2,n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & l_{n2} & \dots & \dots & l_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$l_{i,j} = CA^{i-1} \tau_j$$



$$\omega := dz = \Lambda^{-1} d(\mathcal{O}x)$$



Problème fondamental
dans le cas non linéaire

$$z = \Lambda^{-1} \mathcal{O}x$$

Exemple circuit de Chua

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_1 + \alpha x_2 - \delta f(y) \\ \dot{x}_2 = \beta x_1 - \beta x_2 + \gamma x_3 \\ \dot{x}_3 = -\mu x_2 \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ \beta & -\beta & \gamma \\ 0 & -\mu & 0 \end{pmatrix}$$

Changement de coordonnées

$$\begin{cases} z_3 = Cx = x_1 \\ z_2 = CAx + (\alpha + \beta)Cx = \beta x_1 + \alpha x_2 \\ z_1 = CA^2x + (\alpha + \beta)CAx + \mu\gamma Cx = \alpha\gamma x_3 + \mu\gamma x_1 \end{cases}$$

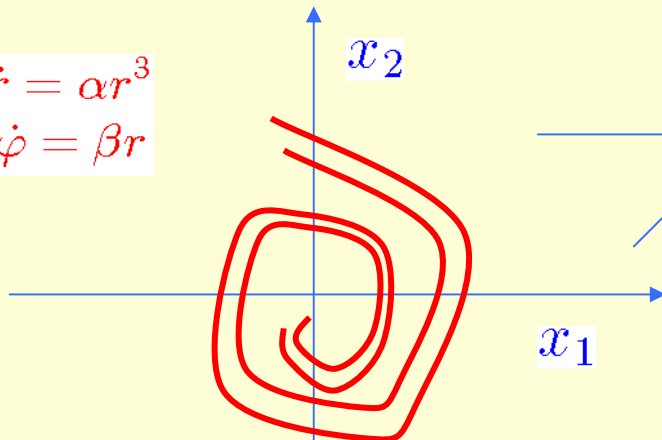
La dynamique de Chua sous la forme canonique d'observabilité non linéaire

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \mu\gamma(-\alpha y - \delta f(y)) \\ \dot{z}_2 = z_1 - \beta\delta f(y) \\ \dot{z}_3 = z_2 - (\alpha + \beta)y - \delta f(y) \\ y = z_3 \end{cases}$$

Exemple : obstruction à $\int$

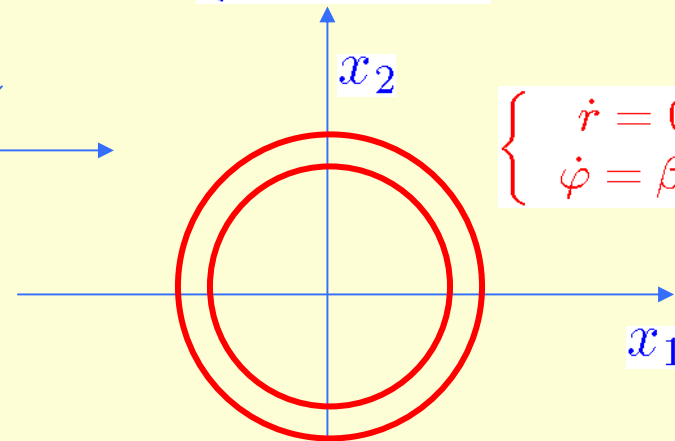
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\beta x_2 + \alpha x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = \beta x_1 + \alpha x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r^3 \\ \dot{\varphi} = \beta r \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\beta x_2 \\ \dot{x}_2 = \beta x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\varphi} = \beta r \end{cases}$$



Il n'existe pas de changement de coordonnées qui inter-change ces deux comportements. Ils ne sont pas topologiquement équivalents (ou conjugués)

Et pourtant il existe un isomorphisme qui inter-change les vitesses des deux comportements !!!

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{\beta} r^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha r^3 \\ \beta r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta r \end{pmatrix}$$

Exemple suite : obstruction à $\int$

On considère le repère suivant :

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\beta} r^2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \omega = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{\beta} r^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

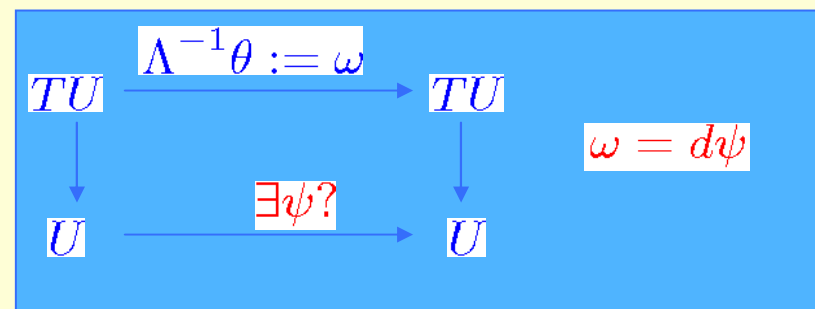
$$\omega(\tau_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \omega(\tau_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le crochet de Lie $0 = [\omega(\tau_1), \omega(\tau_2)] \neq \omega([\tau_1, \tau_2]) = \begin{pmatrix} 2\frac{\alpha}{\beta} r \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\omega = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{\beta} r^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dr - \frac{\alpha}{\beta} r^2 d\varphi \\ d\varphi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

$$d\omega_1 = -2\frac{\alpha}{\beta} r dr \wedge d\varphi \neq 0$$

c'est-à-dire ω_1 n'est pas fermée : ce diagramme n'a pas de solution.



Exemple Système de Rössler

On considère le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2 \\ \dot{x}_3 = \delta + x_3 (x_1 - \beta) \\ y = x_3 > 0 \end{cases} \quad \delta > 0$$

$$[\tau_1, \tau_2] = [\tau_1, \tau_3] = 0$$

$$[\tau_2, \tau_3] - \frac{1}{x_3} \tau_2 \in \text{eng} \{ \tau_1 \}$$

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = -\xi_2 - e^{\xi_3} \\ \dot{\xi}_2 = \xi_1 + \alpha \xi_2 \\ \dot{\xi}_3 = \xi_1 + \delta e^{-\xi_3} - \beta \\ \bar{y} = \xi_3 \end{cases} = A\xi + \phi(y)$$

$$\xrightarrow{\quad} \xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = x_2, \quad \xi_3 = \ln(y)$$

$$\begin{cases} z_3 = C\xi = \xi_3 \\ z_2 = CA\xi - \alpha C\xi = \xi_1 - \alpha \xi_3 \\ z_1 = CA^2\xi - \alpha CA\xi + C\xi = -\xi_2 - \alpha \xi_1 + \xi_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \phi_1(\bar{y}) \\ \dot{z}_2 = z_1 + \phi_2(\bar{y}) \\ \dot{z}_3 = z_2 + \phi_3(\bar{y}) \\ \bar{y} = z_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1 = (\delta - \alpha) e^{-\bar{y}} - \beta \\ \phi_2 = -\bar{y} - e^{\bar{y}} - \alpha (\delta e^{-z_3} - \beta) \\ \phi_3 = -\alpha \bar{y} + \delta e^{-\bar{y}} - \beta \end{pmatrix}$$