La notion d'observateur pour les systèmes non linéaires

Driss Boutat

Résumé. Après une présentation de la notion "d'observabilité" des systèmes dynamiques, nous verrons comment la notion bien connue de "matrice compagnon" d'un polynôme unitaire peut être utilisée en automatique linéaire pour construire des systèmes dynamiques particuliers. Ces systèmes jouent le rôle de capteurs informatique. Ils sont connus sous le nom d'« observateurs ». Nous verrons ensuite sous quelles conditions, dites d'observabilité, un changement linéaire de coordonnées permet réciproquement d'associer à un système dynamique linéaire une matrice compagnon. L'étape suivante consiste à étendre ces conditions au cas de systèmes non linéaires, afin de pouvoir y appliquer cette notion d'observateur. Il s'agit pour cela de les réécrire sous des formes qui supportent les observateurs classiques en automatique. Techniquement, cette réécriture s'appuie sur l'opération entre des champs de vecteurs appelée en géométrie différentielle : "Crochet de Lie".

1. Introduction

Un observateur est un moyen de mesure " informatique " qui permet de retrouver tous les états d'un système industriel en disposant du minimum d'informations sur ces états. Ce minimum d'information est obtenue à l'aide d'un capteur. Un observateur permet donc d'optimiser le nombre de capteurs dans une application industrielle ; d'où son intérêt économique dans l'industrie. Durant les dernières décennies beaucoup de travaux en automatique ont été menés sur la conception d'observateurs. Une manière brute d'observer les états d'un système consiste à dériver numériquement l'information mesurée grâce aux capteurs. L'expérience a montré que cette méthode à l'inconvénient de donner des résultats erronés à cause de l'amplification du bruit due aux imperfections des mesures.

Pour remédier à ce problème, Kalman-Bucy [6] ont introduit en 1961 une solution pour les systèmes linéaires stochastiques. Leur résultat est connu actuellement par le filtre de Kalman. Ce filtre donne aussi de bons résultats pour les systèmes déterministes. En 1964-1971, Luenberger [10], [9] a fondé la théorie d'un observateur qui porte son nom " Observateurs de Luenberger ". Son idée est d'ajouter au modèle mis sous la forme canonique compagnon (Brunovsky) une correction à l'aide de la mesure fournie par les capteurs.

Pour les systèmes non linéaires les ingénieurs utilisent le filtre de Kalman étendu qui malheureusement ne présente pas de bonnes propriétés de convergence. Pour cette raison la conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires est un problème où les travaux de recherche restent très intensifs.

En 1983 Kerner-Isidori [7] ont fourni des conditions nécessaires et suffisantes pour une linéarisation de l'erreur de l'observation des modèles non linéaires afin de leur appliquer l'observateur de Luenberger. Cependant, leurs résultats ne s'appliquent qu'à une classe réduite de systèmes non linéaires.
A la même époque Fliess et Kupka [4] fournissent des conditions suffisantes et nécessaires pour une linéairisation exacte des systèmes non linéaire en mettant en évidence le concept de l'immersion.
Un autre résultat dû à Krener et Repondek [8] viennent pour élargir la classe des systèmes dynamiques étudiés par Krener-Isidori en se permettant un difféomorphisme sur la sortie.

à Supméca pour la Journée Mathématique (JMS) le lundi 25 mai.
Mots-clés: Matrice companion, forme canonique de Brunovsky, Observabilité, Systèmes linéaires, Systèmes non linéaires.

Récemment dans [5] les auteurs ont combiné la méthode de l'immersion à la méthode de linéarisation de l'erreur de l'observation en ajoutant des dynamiques qui ne dépendent que de la sortie et des variables auxiliaries. Cette méthode est analytique et son aspect géométrique a été développé dans [2].

Avec tous mes respects aux chercheurs qui j'ai cité ci-dessus, la vedette dans cette note sera la matrice compagnon. Dans le paragraphe qui suit je vais introduire la notion d'observateur et la notion d'observation suivi d'un exemple qui met en évidence la matrice compagnon. Le paragraphe 3 est dédié à la manière de concevoir deux changements de coordonnées linéaires, un purement algébrique et l'autre géométrique, qui permettent de mettre une matrice lorsque c'est possible sous la forme compagnon. Le paragraphe 4 est consacré à "recopier" le changement de coordonnées géométriques aux systèmes non linéaires pour les transformer sous la forme compagnon modulo "un terme qui ne dépend que de la mesure". Le reste du cette note n'aura plus de secret pour l'intérêt de la forme compagnon en automatique.

2. Préliminaires

Nous considérons sur un voisinage $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ de 0 le système dynamique de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \quad (2.1) \\ y &= h(x) \quad (2.2) \end{aligned}$$

où f est un champ de vecteurs défini sur $\mathcal{X}$ et h est une fonction définie sur $\mathcal{X}$ à valeur dans R. La variable x[1] s'appelle **l'état** du système et y **sa sortie (la mesure)**.
Nous dirons que le système dynamique (2.1-2.2) est donné par la paire (f, h). Sans perte de généralité, on travaillera dans un voisinage "sympa" de 0 et on suppose que $f(0) = 0$ et $h(0) = 0$.

2.1. Notions d'observateur et d'observabilité

La définition suivante donne une notion d'observateur largement répandue dans la littérature de la théorie des observateurs.

Définition 2.1. On appelle un observateur du système dynamique (2.1-2.2) tout système dynamique auxiliaire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \widehat{f}(\xi(t), y(t)) \quad (2.3) \\ \widehat{x}(t) &= \xi(t) \quad (2.4) \end{aligned}$$

dont la sortie est l'état estimé $\widehat{x}(t)$ tel que :

$$\|e(t)\| = \|\widehat{x}(t) - x(t)\| \to 0 \text{ quand } t \mapsto +\infty \quad (2.5)$$

$e(t)$ s'appelle l'erreur de l'observation.

Par la suite on s'intéressera aux observateurs de la forme (2.3-2.4) tel que la dynamique de **l'erreur d'observation est linéaire** c'est-à- dire l'erreur $e(t)$ vérifie une équation linéaire de ce type :

$$\dot{e} = \overline{A}e \quad (2.6)$$

où $\overline{A}$ est une matrice $n \times n$. Notons que dans ce cas pour que l'erreur satisfait (2.5) il suffit que la matrice $\overline{A}$ dans (2.6) ait un spectre (les valeurs propres) à parties réelles < 0.

[1]dans cet exposé on notera $\dot{x} := \frac{dx(t)}{dt}$ la dérivée par rapport au temps d'une courbes d'évolution $x(t)$ dans l'espace d'état.

Avant de concevoir de tels observateurs il faut s'assurer que le système dynamique étudié est observable[2]. Commençons par donner une description schématique de la notion d'un système observable :
Considérons dans un premier temps un système à deux états $x = (x_1, x_2)^T$ dont on ignore l'évolution. La figure (Fig. 1) montre que la mesure (sortie) $y_1 = h(x) = x_2$ ne fournit qu'une partie de l'état à savoir la variable x_2. Ce qui ne permet pas de determiner l'état x de notre

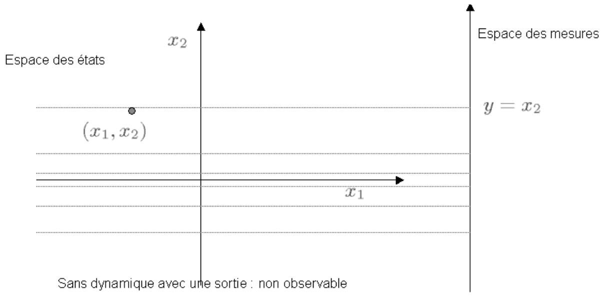

FIG. 1

système. En effet, on ne pourra pas distinguer deux états du système qui ont la même composante x_2. On dit alors que le système n'est pas observable.

Donc, il nous faut accéder à une autre mesure "sortie" indépendante de la première (les sorties ne doivent pas être parallèles). Considérons maintenant le système représenté par la figure (Fig.2). Dans ce dernier les mesures forment des nouvelles coordonnées de l'espace d'états. En

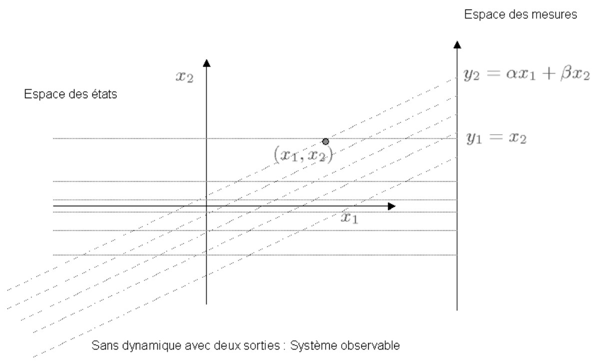

FIG. 2

effet, nous avons :

$$x_1 = \frac{1}{\alpha}(y_2 - \beta y_1) \quad \text{et} \quad x_2 = y_1. \tag{2.7}$$

Donc le système est observable.

D'un point de vue gestionnaire ça fait beaucoup deux mesures (deux capteurs) pour un système à deux états. Pour optimiser (économiser) le nombre de capteurs, on suppose, par la suite, que l'on connaît l'évolution de notre système. C'est-à-dire on dispose d'un modèle dynamique du système en question. Mathématiquement parlant on connaît le champ de vecteurs f (champ de vitesses) qui régi l'évolution du système.
Revenant sur la figure vu dans la figure (Fig.3) avec la connaissance des trajectoires de la dynamique (les courbes tangentes à f).

Maintenant, la dynamique fournit une nouvelle mesure y_2 qui est la variation de la sortie y_1 long de la dynamique f comme dans (Fig.4).

Dans le paraphe qui suit nous allons exprimer formellement cette idée en introduisant la notion

[2] c'est-à-dire il existe une correspondance bijective (local) entre les états du système et (la mesure et quelques unes de ses dérivées)

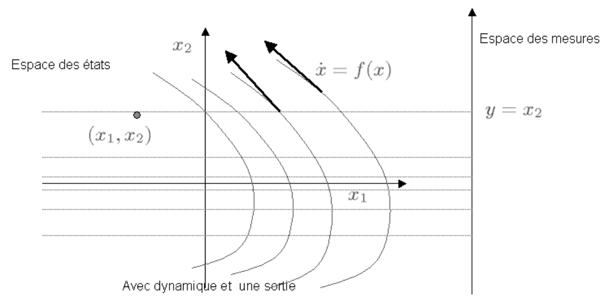

Fig. 3

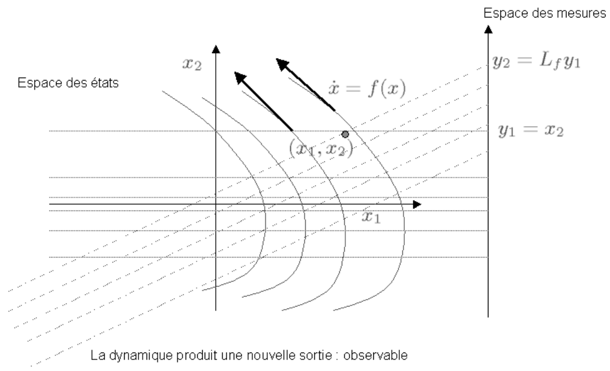

Fig. 4

de la dérivée de Lie.

2.2. **Observabilité au sens du rang**

Rappelons qu'un champ de vecteurs f peut être interprété selon les besoins de deux manières :

(1) Comme une application qui à tout point x assigne un vecteur $f(x)$. Dans ce cas on l'écrit dans la base canonique sous la forme suivante :

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

On dit que les f_i sont ses composantes. Sous cette forme on dit aussi qu'il régit un système d'équations différentielles (une dynamique) dont les courbes tangentes $x(t)$ vérifient :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)).$$

On dit que $x(t)$ est une courbe intégrale de f.

(2) Comme une dérivation qu'il faudra écrire sous la forme suivante :

$$f = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

sous cette forme il s'applique à une fonction réelle $h(x)$ comme suit :

$$L_f h = f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + \dots + f_n \frac{\partial h}{\partial x_n},$$

Cette nouvelle fonction $L_f h$ s'appelle la dérivée de Lie de h dans la direction de f.
Si $f = \frac{\partial}{\partial x_i}$, alors $L_f h = \frac{\partial h}{\partial x_i}$ et on reconnaît les dérivations partielles. Il est facile de voir que :

$$L_f h = dh(f) = \nabla h.f = \frac{dy}{dt} := \dot{y}. \tag{2.8}$$

où dh est la différentielle de h, et $\nabla h.f$ est le produit scalaire du gradient ∇h de h avec f.
Maintenant, nous sommes en mesure de donner une définition "faible" de la notion d'observabilité[3] (voir [3]).

Définition 2.2. Considérons le système dynamique de la forme (2.1-2.2). On dit que la paire (f, h) est observable au sens du rang si la différentielle de la sortie h avec les différentielles de ses dérivées de Lie successives dans la directions de f jusqu'à l'ordre $n-1$ sont indépendante (sur un voisinage de 0). C'est-à-dire que :

$$Rang\{dh, dL_f h, ..., dL_f^{n-1} h\} = n. \tag{2.9}$$

où l'écriture de $dL_f^k h$ ici est donnée par le co-vecteur :

$$dL_f^k h = (\frac{\partial L_f^k h}{\partial x_1}, \frac{\partial L_f^k h}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial L_f^k h}{\partial x_n})$$

On remarque que $L_f^k h = y^{(k)}$ est la dérivée $k^{ième}$ de la sortie y. Donc, sous la condition du rang (2.9) ci-dessus l'application :

$$\psi : x \mapsto (y, \dot{y}, ..., y^{(n-1)}) \tag{2.10}$$

est un difféomorphisme local. Plus précisément, ce difféomorphisme est l'inverse de l'application suivante :

$$\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ ... \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ ... \\ L_f^{(n-1)} h(x) \end{pmatrix} = \psi^{-1}(x). \tag{2.11}$$

C'est-à-dire l'état x s'écrit (localement) en fonction de la sortie y est de ses dérivés successives. Le lecteur peut prendre cette dernière propriété pour définition d'un système observable :

$$x = \psi(y, \dot{y}, ..., y^{(n-1)}).$$

Par la suite on adoptera la notation suivante :

$$\theta_k = dL_f^{k-1} h \quad \text{pour} \quad 1 \leq k \leq n.$$

On appellera ces 1-formes exactes les 1-formes d'observabilité et on notera :

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ ... \\ \theta_n \end{pmatrix} = d\psi^{-1}. \tag{2.12}$$

θ peut être vu comme une matrice dans la $i^{ième}$ ligne est formée des coordonnées de la 1-forme θ_i vu comme un co-vecteur.

Donnons l'exemple de référence de système dynamique observable.

[3]pour une définition précise de l'observabilité le lecteur est invité à lire le joli chapitre 5 écrit par Monsieur G. Bornard et ses co-auteurs

2.3. Exemple fondamental

Considérons dans $\mathbb{R}^n$, de coordonnées $(z_i)_{1\leq 1\leq n}$, le système dynamique linéaire avec la sortie $y = z_n$. Le reste des états du système s'obtient par dérivations successives de la sortie.

$$z_{i-1} = \dot{z}_i \quad pour \;\; 2 \leq i \leq n.$$

Il est donné par son écriture matricielle comme suit :

Exemple 2.3.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_0 z \qquad (2.13) \\ y &= C_0 z \qquad (2.14) \end{aligned}$$

avec

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0, & .., & .., & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

Comme $dL_{Ax}^k Cx = CA^k = \theta_{k+1}$, alors il est facile de voir que l'on a :

$$\theta = \begin{pmatrix} C_0 \\ C_0 A_0 \\ \ddots \\ C_0 A_0^{n-2} \\ C_0 A_0^{n-1} \end{pmatrix} \qquad (2.15)$$

est une matrice dont les lignes sont formées par les $1 \times n$ matrices $C_0 A_0^k$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Cette matrice s'écrie :

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On l'appelle la matrice **d'observabilité** du système dynamique (2.13-2.13). Il est à noter aussi que $rang(\theta) = n$ et nous avons :

$$x = \theta^{-1} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} \qquad (2.16)$$

c'est-à-dire le système est observable.
Il faut faire attention, la formule (2.16) n'est pas applicable dans le cas non linéaire. Certes, j'ai dis plus haut que θ peut être vu comme une matrice même pour le système non linéaire. Elle est même inversible sous la condition du rang. Cependant, il ne faut pas oublier[4] que c'est une différentielle (2.12). Il s'avère que dans le cas linéaire (et qui parmi nous ne le fait pas !) on confond une application linéaire avec sa différentielle.

[4]ceci est un élément à prendre en considération pour le passage du linéaire au non linéaire

Une forme plus générale du système dynamique (2.13-2.13) est la suivante :

$$\dot{z} = A_0 z + \beta(y) \quad (2.17)$$
$$y = C_0 z \quad (2.18)$$

où $\beta(y)$ est un champ de vecteurs (terme) qui ne dépend que de la sortie y. Il est facile de voir que sous cette forme générale le système est encore observable.
Sous cette dernière forme (2.17-2.18), on dit que le système dynamique est sous la forme **normale d'observabilité de Brunovsky** modulo une injection de sortie.

Pour un tel système dynamique (2.17-2.18), on adopte **l'observateur de Luenberger**[10] qui consiste à rajouter un terme de correction dépendant de la sortie à une copie de la dynamique du système en question :

$$\dot{\xi} = \underbrace{A_0\xi + \beta(y)}_{\text{copie de la dynamique}} + \underbrace{K(y - C_0\widehat{z})}_{\text{terme correctif}} \quad (2.19)$$
$$\widehat{z}(t) = \xi. \quad (2.20)$$

L'erreur $e = z(t) - \widehat{z}(t)$ de l'observation est régie par la dynamique linéaire suivante :

$$\dot{e} = (A_0 - KC_0)e,$$

où $K = (k_i)_{0\leq i\leq n-1} \in \mathbb{R}^n$ s'appelle le vecteur des gains.
Nous allons finir cette section par quelques remarques importantes.

Remarque 2.4. (1) Notons bien que :

$$A_0 - KC_0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & -k_0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & -k_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & -k_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -k_{n-1} \end{pmatrix}$$

est la **matrice compagnon** dont il est question dans cette note.

(2) Le polynôme caractéristique de la matrice $A_0 - KC_0$ est :

$$P_{A_0-KC_0}(s) = k_0 + k_1 s + .. + k_{n-1}s^{n-1} + s^n$$

alors, K peut être choisi de sorte que le spectre de la matrice $A_0 - KC_0$ soit fixer arbitrairement. En particulier, à partie réelle négative, ce qui assure la convergence asymptotique vers zéro de $e(t)$ lorsque $t \mapsto +\infty$.

(3) Il est aisé de voir que le choix arbitraire de K est équivalent au fait que la paire (A_0, C_0) satisfait à la condition dite de rang suivante :

$$\text{rang}\begin{pmatrix} C_0 \\ C_0A_0 \\ \ddots \\ C_0A_0^{n-2} \\ C_0A_0^{n-1} \end{pmatrix} = n \quad (2.21)$$

Pour finir cette discussion, il faut remarquer que la forme compagnon nous permet d'opérer sur les valeurs propres d'une matrice avec des opérations de type $-KC_0$.

3. Mise sous forme companion de l'erreur d'observabilité des systèmes linéaires

On considère un système dynamique linéaire mono sortie de la forme suivante :

$$\dot{x} = Ax + \phi(y) \quad (3.1)$$
$$y = Cx \quad (3.2)$$

où A est une matrice $n \times n$, C est une 1−forme linéaire $1 \times n$.

Existe t-il un changement de coordonnées $z = Px$ qui transforme le système dynamique (3.1-3.2) sous la forme (2.17-2.18) ?
Nous allons construire deux changement de coordonnées pour la mise sous forme compagnon d'une matrice un que je vais appeler algébrique et l'autre géométrique.

3.1. Changement de coordonnées linéaires "algébrique"

Il est clair qu'un changement de coordonnées préserve la condition de rang (2.21). Donc, cette dernière est une condition nécessaire pour l'existence de $z = Px$. Montrons qu'elle est en fait suffisante. On suppose donc que cette condition est satisfaite :

$$\text{rang}(\theta) = n \tag{3.3}$$

où on rappelle que :

$$\theta = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \ddots \\ CA^{n-2} \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

s'appelle la matrice d'observabilité du système dynamique (3.1-3.2).
Soit $(p_i)_{0 \leq i \leq n}$ les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice A et considérons le changement de variables linéaire suivant :

$$z_n = Cx \tag{3.4}$$

$$z_{n-i} = CA^i x + p_{n-1}CA^{(i-1)}x + ... + p_{n-i}Cx. \tag{3.5}$$

pour $1 \leq i \leq n-1$.

La dérivation par rapport au temps de z_n, donne :

$$\dot{z}_n = CAx = z_{n-1} + C\phi(y) - p_{n-1}y,$$

de la même manière on a :

$$\dot{z}_{n-1} = z_{n-2} - p_{n-2}y + (CA + C)\phi(y)$$

Cette procédure prend fin lorsque la dérivé de :

$$z_1 = CA^{n-1}x + p_{n-1}CA^{(n-2)}x + ... + p_1Cx.$$

En effet, nous avons :

$$\dot{z}_1 = CA^n x + p_{n-1}CA^{(n-1)}x + ... + p_1CAx,$$

d'où

$$\dot{z}_1 = -p_0 y + \varphi(y)$$

Car, grâce au théorème de Cayley-Hamilton, nous avons : $A^n + p_{n-1}A^{n-1} + ... + p_1A + p_0I = 0$.
Par conséquent le changement de coordonnées (3.4-3.5) transforme le système dynamique (3.1-3.2) sous la forme (2.17-2.18).

3.2. Changement de coordonnées linéaires "géométrique"

Maintenant, nous allons fournir un autre changement de coordonnées. Pour cela posons la question différemment. Pour une matrice A donnée on peut se demander s'il existe une sortie C telle que la condition (3.3) du rang est satisfaite ?

La réponse à cette question est affirmative pour une matrice cyclique. C'est-à-dire il existe un vecteur τ_1 tel que la famille de vecteurs $\tau = \{\tau_i\}_{1\leq i\leq n}$ construite par induction comme suit :

$$\tau_i = A\tau_{i-1} \text{ pour } 2 \leq i \leq n$$

est une base de $\mathbb{R}^n$. Soit Q la matrice dont la $i^{ème}$ colonne est le vecteur τ_i. C'est la matrice qui transforme la base canonique e_i comme suit :

$$Qe_i = \tau_i.$$

On a :

$$Q^{-1}AQe_i = e_{i+1} \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1.$$

Il est aussi facile de voir que :

$$Q^{-1}AQe_n = p_0e_1 + p_1e_2 + ... + p_{n-1}e_n.$$

Posons $P = Q^{-1}$ et considérerons le changement de coordonnées suivants :
$z = Px$, puis dérivons on obtient :

$$\dot{z} = PAP^{-1}z + P\beta(y) = A_0z + PC_0z + P\beta(y)$$

D'autre par soit C la 1-forme définie par :

$$\begin{aligned} C\tau_i &= 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1 \\ C\tau_n &= 1. \end{aligned}$$

Alors (A, C) est une paire observable c'est-à-dire la condition du rang (3.3) est satisfaite.
En outre, le changement de coordonnées $z = Px$ est une changement de coordonnées qui transforme A sous la forme compagnon.
Donnons le liens entre ces deux changements de coordonnées. Il est facile de montrer que :

Proposition 3.1. *Soit $\Lambda = \theta(\tau)$ alors $\omega = \Lambda^{-1}\theta = P$*

Pour finir ce paragraphe donnons les composante de ω. Par induction on a :

$$\omega_n = \frac{1}{l}\theta_1 \tag{3.6}$$

$$\omega_{n-r} = \frac{1}{l}(\theta_{r+1} - \sum_{i=n-r+1}^{n} l_{r+1,i}\omega_i) \tag{3.7}$$

$$\text{pour } 1 \leq r \leq n-1.$$

3.3. La route vers le non linéaire

Pour faire le pont entre les systèmes linéaires et les systèmes non linéaires nous avons besoin d'une définition :

Définition 3.2. On appelle le crochet de Lie de deux champs de vecteurs X et Y le champ de vecteurs $[X, Y]$ défini par la notion de dérivation comme suit :

$$L_{[X,Y]}h = L_XL_Yh - L_YL_Xh \tag{3.8}$$

pour toute fonction h suffisamment derivable.
Si $[X, Y] = 0$ on dit alors que X et Y commutent.

Remarque 3.3. (1) Il est aussi connu que les champs (les dérivations) constants $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$ et $Y = \frac{\partial}{\partial x_2}$ commutent. C'est le théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_1} = L_{[X,Y]} h = 0$$

, pour une fonction réelle h suffisamment differentiable.

(2) Il est connu aussi qu'un champ vecteurs sans singularité (sans zéros) peut être transformé localement par un difféomorphisme en un champs de vecteur contant. Pour deux champs de vecteurs X et Y indépendant et sans singularités le crochet $[X, Y] \neq 0$ est l'obstruction à l'existence d'un même difféomorphisme ϕ[5](local) (voir Fig. 5) qui les transforme en deux champs de vecteurs constants.

(3) Le crochet $[X, Y] \neq 0$, peut aussi être vu comme l'obstruction à revenir en un point de départ x_0 en suivant la courbe intégrale de X pendant un instant assez petit t, puis celle de Y, puis $-X$ et enfin $-Y$. Voir Figure (Fig. 5) où les $e_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.
En effet il est aisé de démontré que :

$$x(4t) = x(0) + t[X, Y] + O(t^2), \tag{3.9}$$

où $O(t^2)$ fait intervenir des crochets de Lie qui contiennent tous $[X, Y]$.

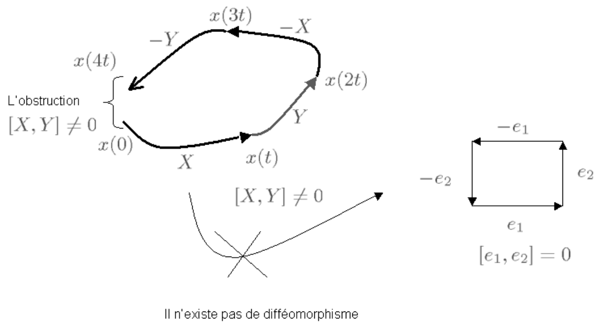

Fig. 5

Les exemples de calcul de crochet de Lie à retenir pour l'instant sont :

Exemple 3.4. (1) si X et Y sont deux champs constants alors $[X, Y] = 0$

(2) si X est contant et $Y = Ax$ linéaire alors $[X, Y] = AX$,

(3) si $X = A_1 x$ et $Y = A_2 x$ sont linéaires alors $[X, Y] = (A_2 A_1 - A_1 A_2)X$ cette dernière expression est nulle si les deux matrices A_1 et A_2 commutent.

Maintenant il faut bien noter deux choses dans le cas linéaire :

(1) si τ_1 est un vecteur cyclique de A alors $\tau_k = A\tau_{k-1} = [\tau_k, Ax]$

(2) les τ_k commutent par rapport au crochet de Lie.

(3) les 1-formes CA^k sont les différentielles de $CA^k x$ et qui sont les dérivées de Lie dans la direction du champ de vecteur linéaire Ax de $CA^{k-1}x$:

$$CA^k = d(CA^k x) = d(L_{Ax} CA^{k-1} x) = y^{(k)} \tag{3.10}$$

[5]Il induit un isomorphisme $d\phi := \phi_*$ sur l'algèbre de Lie des champs de vecteurs : $\phi_*([X, Y]) = [\phi_*(X), \phi_*(Y)]$

4. Cas des systèmes non linéaires.

Dans cette section, nous allons fournir étape par étape à travers quelques résultats[6] l'évolution du problème de linéarisation de l'erreur de l'observation depuis

4.1. Théorème de Krener et Isidori

On considère le système non linéaire mono sortie donnée dans (2.1-2.2). Un des problème les plus abordé en automatique durant ces trentaines dernières années concerne la linéarisation de l'erreur de l'observation :

Donner les conditions suffisantes d'existence d'un difféomorphisme local qui transforme le système dynamique (2.1-2.2) sous la forme (2.17-2.18).

On va essayer de faire une analogie avec le changement de coordonnées linéaire. Pour cela, nous allons "recopier" le changement de coordonnées géométrique donné dans la proposition 3.1. Comme dans le cas linéaire, on suppose que la condition du rang (2.9) est vérifiée et on définit le champs de vecteur τ_1 par :

$$\begin{cases} dL_f^k h(\tau_1) = 0, \quad pour \quad 1 \leq k \leq n-1 \\ dL_f^n h(\tau_1) = 1, \end{cases} \tag{4.1}$$

Comme pour le cas linéaire, il est facile de voir sous la condition du rang que la famille $\tau = \{\tau_i\}_{1\leq i\leq n}$ de champs de vecteurs donnés par induction comme suit :

$$\tau_i = [f, \tau_{i-1}]$$

est une base.
Puis, considérons Λ la matrice "non constante" dont la $i^{ième}$ colonne est l'évaluation des 1-formes d'observabilité θ sur τ_i :

$$\Lambda = \theta(\tau_i)$$

et soit

$$\omega = \Lambda^{-1}\theta.$$

Contrairement, au cas linéaire où on a confondu l'application linéaire ω à ωx, pour le cas non linéaire ω est un isomorphisme de fibré tangent $T\mathcal{X}$ qui n'est pas nécessairement la différentielle d'une application ϕ sur $\mathcal{X}$. C'est-à-dire on cherche à rendre ce diagramme commutatif.

$$\begin{array}{ccc} T\mathcal{X} & \xrightarrow{\omega=\phi_*} & T\mathcal{X} \\ \tau\downarrow & & \downarrow\tau \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{\phi?} & \mathcal{X} \end{array}$$

Pour l'instant, puisque $\omega(\tau_i) = e_i = \frac{\partial}{\partial z_i}$ le $i^{ème}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors on a :

$$\omega([\tau_i, \tau_j]) = [\omega(\tau_i), \omega(\tau_j)] = 0.$$

Par conséquent, la condition de commutativité $[\tau_i, \tau_j] = 0$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$ est une condition nécessaire pour l'existence de ϕ tel que $\omega = \phi_*$.
En fait cette condition est aussi nécessaire comme le formule le résultat suivant [7] :

Théorème 4.1. *Sous la condition du rang il existe un changement de coordonnées local qui transforme le système dynamique (2.1-2.2) sous la forme (2.17-2.18) si et seulement si les assertions équivalentes suivantes sont satisfaites :*

(1) $[\tau_i, \tau_j] = 0$ *pour tous* $1 \leq i, j \leq n$ *c'est-à-dire les* τ_i *commutent par rapport au crochet de Lie,*

(2) $d\omega_i = 0$ *pout tout* $1 \leq i \leq n$

[6] leur liste est très très loin d'être complète

sous ces conditions la différentielle du changement de coordonnées $z = \phi(x)$ est donnée par : $\phi_* = \omega$. Dans un ouvert contractile on a : $z_i(x) = \phi_i(x) = \int_\gamma \omega_i$ pour tout chemin γ reliant 0 à x.

Démonstration. On rappelle que les composantes de ω sont des 1-formes différentielles. On rappelle aussi (voir par exemple [1]) que la différentielle composante par composante donne :

$$d\omega(X,Y) = L_X\omega(Y) - L_Y\omega(X) - \omega([X,Y]).$$

Comme $\omega(\tau_i)$ est un champ de vecteurs constant, alors on a :

$$d\omega(\tau_i,\tau_j) = -\omega([\tau_i,\tau_j]).$$

Comme ω est un isomorphisme, alors la commutitivité des τ_i est équivalente à la fermeture des 1-formes ω_i.
par le lemme de Poincaré il existe un difféomorphisme local ϕ dont la différentielle $\phi_* = \omega$. Maintenant, on va voir comment $\phi_* = \omega$ transforme le champ de vecteurs f. Pour cela on dérive $\omega(f)$.

$$\frac{\partial \phi_*(f)}{\partial z_i} = [\phi_*(f), \frac{\partial}{\partial z_i}] = \phi_*[f,\tau_i] = \omega(\tau_{i+1}) = \frac{\partial}{\partial z_{i+1}},$$

pour tout $1 \leq i \leq n-1$. Par conséquent, par intégration on obtient :

$$\phi_*(f) = A_0 z + \beta(z_n).$$

La sortie est linéaire dans les nouvelles coordonnées est dû à la construction (4.1) de τ_1. □

Donnons un exemple de système dynamique qui satisfait les conditions du théorème 4.1 ci-dessus.

Exemple 4.2. On considère dans $\mathbb{R}^3$ le système dynamique suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = x_2 \\ y = x_3 \end{array}\right. \tag{4.2}$$

Un calcul direct donne les trois 1-formes d'observabilité :

$$\theta_1 = dx_3, \quad \theta_2 = dx_2 \ \text{ et } \ \theta_3 = dx_1.$$

Donc :

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Par suite les éléments du repère de Krener et Isidori sont :

$$\tau_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \tau_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} \ \text{ et } \ \tau_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} + x_3\frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Il clair que $[\tau_i,\tau_j] = 0$.
Maintenant l'évaluation de θ sur le repère τ donne :

$$\Lambda = \theta(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x_3 \end{pmatrix},$$

D'où on a :

$$\omega = \Lambda^{-1}\theta = \begin{pmatrix} dx_1 - x_3dx_3 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

Il est clair que ces trois 1-formes sont fermées ce qui est en concorde avec la commutativité du repère τ. Mieux encore elles sont exactes. Donc, elles fournissent un difféomorphisme global :

$$\phi(z) = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{1}{2}x_3^2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, dans ces nouvelles coordonnées le système dynamique (4.2) devient :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 0 \\ \dot{z}_2 = z_1 \\ \dot{z}_3 = z_2 \\ y = z_3 \end{cases}$$

Pour clore cette section, nous donnerons un exemple simple qui ne satisfait pas les conditions du théorème de Krener-Isidori.

Exemple 4.3. On considère le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ y = \sin x_2 \end{cases} \tag{4.3}$$

Les 1-formes d'observabilité sont données par :

$$\theta_1 = \cos x_2 dx_2 \quad \text{et} \quad \theta_2 = \cos x_2 dx_1 - x_1 \sin x_2 dx_2$$

Le repère de Krener-Isidori est formé par :

$$\tau_1 = \frac{1}{\cos x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}$$

$$\tau_2 = \frac{1}{\cos x_2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{\cos x_2}(x_2 - x_1 \tan x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}$$

Il est facile de vérifier que :

$$[\tau_1, \tau_2] = -2\frac{1}{\cos^2 x_2}\tan x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \neq 0.$$

Par conséquent le système (4.3) ne peut pas se mettre sous la forme canonique d'observabilité.

Il est facile de voir que si dans l'exemple ci-dessus on remplace la sortie y par la $\overline{y} = x_2$ alors les conditions du théorème seront vérifiée. En effet, dans ce cas le difféomorphisme (pour sa construction voir l'exemple 4.5) est donné par :

$$\phi(z) = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{1}{2}x_2^2 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Le changement que nous venions d'effectuer sur la sortie (à part qu'il est local) ne fait pas perdre l'objectif rechercher puisque si on mesure $y = \sin x_2$, alors on "mesure" aussi $\overline{y} = \arcsin y$. C'est de cette idée, due à Krener-Respondek, que nous allons développer dans la prochaine section.

4.2. **Théorème de Krener et Respondek**

Krener et Respondek ont relaxé les conditions du théorème ont considérons les difféomorphismes qui transforment la dynamique du système (2.1) en la dynamique du système (2.17) et qui transforment la sortie (2.2) y en $\overline{y} = \mathcal{F}(y)$.
Ceci s'exprime par le choix d'un autre champ de vecteur τ_1^1 au lieu de τ_1 qui vérifie les équations suivantes :

$$\begin{cases} \theta_k(\tau_1^1) = 0, \qquad \textit{pour}; \quad 1 \leq k \leq n-1 \\ \theta_n(\tau_1^1) = l(y), \end{cases} \tag{4.4}$$

où $l(y)$ est une fonction de la sortie y à determiner. La dernière équation qui diffère de celle (4.1) signifie précisément que l'on ne demande pas une sortie linéaire.

En fait on pose : $\tau_1^1 = \frac{1}{l(y)}\tau_1$ où le champ de vecteurs τ_1 est déjà construit à partir des equations (**??**-4.1). Puis, on construit par induction un nouveau repère comme suit :

$$\tau_k^1 = [\tau_{k-1}^1, f] \quad \text{pour tout} \quad 2 \leq k \leq n.$$

De la même manière on considère la matrice $\Lambda_1 = \theta(\tau^1)$ et $\omega_1 = \Lambda_1^{-1}\tau$.
Pour énoncé plus précisément le théorème de Krener et Respondek rappelons la forme canonique recherchée dans ce cas :

$$\dot{z} = A_0 z + \beta(y) \tag{4.5}$$

$$\overline{y} = \mathfrak{F}(y) \tag{4.6}$$

Cette dernière forme supporte bien l'observateur suivant :

$$\dot{\xi} = \underbrace{A_0\xi + \beta(y)}_{\text{copie de la dynamique}} + \underbrace{K(y-\overline{y})}_{\text{terme correctif}} \tag{4.7}$$

$$\widehat{z}(t) = \xi. \tag{4.8}$$

Théorème 4.4. *Il existe un difféomorphisme local qui transforme le système dynamique (2.1-2.2) sous la forme (4.5-4.6) si et seulement si il existe une fonction $l(y) \neq 0$ telle que les assertions équivalentes suivantes sont satisfaites :*

(1) $[\tau_i^1, \tau_j^1] = 0$ *pour tous* $1 \leq i, j \leq n$ *c'est-à-dire les* τ_i^1 *commutent par rapport au crochet de Lie,*

(2) $d\omega_i^1 = 0$ *pout tout* $1 \leq i \leq n$

La démonstration est la même que pour le théorème de Krener et Isidori. Ici, on fait remarquer que on écrivant $\omega_1 = \Lambda_1^{-1}\theta$, on trouve que $dz_n = \omega_n = \frac{1}{l(y)}dy$. Ceci nous donne naturellement $\overline{y} = \mathfrak{F}(y) = \int \frac{1}{l(y)}dy$.

La dilatation $\tau_1^1 = \frac{1}{l}\tau_1$ permet de soulever l'obstruction de la commutativité des champs de vecteurs τ_1 et τ_n. Plus précisément, pour espérer que le résultat de Krener et Respondek marche pour un système dynamique il faut que $[\tau_1, \tau_j] = 0$ pour tout $1 \leq j \leq n-1$ et

(1) pour n pair $[\tau_1, \tau_n^1] = \alpha_1(y)\tau_1$

(2) pour n impair $[\tau_1, \tau_n] = 0$ et $[\tau_2, \tau_n] - \alpha_2(y)\tau_2 \in \text{span}\{\tau_1\}$.

sous ces condition la fonction $l(y)$ est déterminée, selon la parité de la dimension n de l'espace d'état à partir des équations différentielles suivantes :

(1) pour n pair $\frac{dl}{dy} - l\alpha_1(y) = 0$

(2) pour n impair $-n\frac{dl}{dy} + l\alpha_2(y) = 0$.

On va finir ce paragraphe par un exemple ulistratif.

Exemple 4.5. On considère encore le système de l'exemple 2.

$$\tau_1^1 = l(y)\tau_1$$

On rappelle que

$$[\tau_1, \tau_2] = -2\frac{1}{\cos^2 x_2}\tan x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \neq 0.$$

comme l'espace d'état est de dimension $n = 2$ pair alors la fonction $l(y)$ vérifie l'équation suivante :

$$l'(y) - (2\frac{1}{\cos^2 x_2}\tan x_2)l(y).$$

D'où on a :

$$\frac{l'(y)}{l(y)} = (2\frac{1}{\cos^2 x_2}\tan x_2).$$

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} dx_1 - x_2 dx_2 \\ dx_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2^2 \\ z_2 = x_2 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 0 \\ \dot{z}_2 = z_1 \\ \tilde{y} = z_2 = \arcsin(y) \end{cases}$$

4.3. **Théorème géométrique de l'immersion**

Une fois la fonction $l(y)$ est calculée il faut vérifier est ce que les conditions 1 de la commutativité sont satisfaites. Si ce n'est pas la cas alors on aura à soulever les obstructions suivantes :

(1) $[\tau_1, \tau_j] = 0$ pour tous $1 \leq j \leq n-1$,
(2) pour n pair $[\tau_1, \tau_n] = 0$
(3) pour n impair $[\tau_3, \tau_n] - \alpha_2(y)\tau_3 \in \text{span}\{\tau_1, \tau_2\}$.

Ceci nous permet d'accéder à un autre stade. En effet on considère une dynamique auxiliaire $\dot{w} = a(w, y)$. C'est-à-dire on considère un nouveau système dynamique dans un espace de dimension $n+1$ régi par le champs de vecteur suivant :

$$F(x, w) = f(x) + a(w, y)\frac{\partial}{\partial w} \tag{4.9}$$

Pour l'instant il faut penser à la dynamique auxiliaire la plus simple $\dot{w} = y$ et se poser la question suivante :
existe t-il un difféomorphisme ϕ local dans l'espace étendu $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$\phi_*(F) = Az + \beta(y, w)$$

Cette fois ci on va fabriquer un autre repère τ^2 à partir de τ^1 en posant :

$$\tau_1^2 = l_2(w)\tau_1^1$$

L'idée essentielle est d'utiliser la fonction $l_2(w)$ à rendre ce nouveau repère commutatif. Le résultat qui suit donne des conditions suffisantes :

Théorème 4.6. *Si le repère τ^2 est commutatif alors il existe un difféomorphisme qui transforme le système dynamique étendue en la forme canonique*

Démonstration. On peut traduire sans difficulté majeurs la même démonstration que pour le théorème ([**?**]). Mais donnons l'idée principale de la construction du difféomorphisme :
On trvaille cette fois-ci est sur un espace de dimension $n+1$. Nous avons par construction $(\tau_i^2)_{1\leq n}$ qui s'obtiennent par induction à partir $\tau_1^2 = l_1(w)\tau_1^1 = l_1(w)l(y)\tau_1$ comme suit :

$$\tau_{i+1}^2 = [\tau_i^2, f].$$

Il ne manque donc un champ de vecteurs T_{n+1} pour completer la base. On distingue deux cas :

(1) si ce champ de vecteurs est obtenu par induction $T_{n+1} = [\tau_n, f]$ et qu'il commute avec les n premiers alors $\phi_*(f) = Az + \beta(w)$, sinon
(2) on construit un champ de vecteurs indépendants $\phi_*(f) = Az + \beta(z_n, w)$

□

Bref, donnons un exemple illustratif de ce que je viens de raconter ci-dessus.

Exemple 4.7. On considère le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = x_2 \\ y = x_2 \end{cases}$$

Un calcul simple donne :

$$\theta_1 = dx_3, \quad \theta_2 = dx_2 \text{ et } \theta_1 = dx_1.$$
$$\tau_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \tau_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_1} \text{ et}$$

$$\tau_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} + (x_3^2 - x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Il est facile de vérifier que l'on a :

$$[\tau_2, \tau_3] = -2\frac{\partial}{\partial x_1} = -2\tau_1 \neq 0$$

Maintenant on considère la dynamique auxiliaire suivante :

$$\dot{w} = y$$

et on pose :

$$\tau_1^2 = l(w)\tau_1,$$

où l est à déterminer.

$$\tau_2^1 = \left[\tau_1^1, f + x_3\frac{\partial}{\partial w}\right] = l(w)\tau_2 - x_3 l'(w)\tau_1$$
$$\tau_3^1 = l(w)\tau_3 - 2x_3 l'(w)\tau_2 + (x_2 l'(w) + x_3^2 l"(w))\tau_1$$
$$[\tau_2^1, \tau_3^1] = (-2l^2 + 2ll')\tau_1 = 0$$

Ceci implique que :

$$-2l^2 + 2ll' = 0$$

ce qui donne :

$$l(w) = e^w.$$

Maintenant construisons dans $\mathbb{R}^{3+1}$ le repère de la linéarisation :
Nous avons déjà calculé les trois premiers champs de vecteurs τ_1^2, τ_2^2 et τ_3^2. Il reste à completer la base par un champ de vecteurs T_{3+1}. qui commutent avec les trois premiers.
Un calcul facile montre que $\tau_4 = [\tau_3, F]$ ne commute pas avec les premiers. Donc, on ait amené à le modifier. Il est aisé de verifier que le champ de vectteur suivant commute avec eux :

$$T_4 = e^w\frac{\partial}{\partial w} + e^w x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + e^w\left(x_2 - \frac{1}{2}x_3^2\right)\frac{\partial}{\partial x_2} + e^w x_3\frac{\partial}{\partial x_3}$$

Calculons la matrice Λ_2 relativement à ce nouveau repère et aux 1-formes θ_1, θ_2, θ_3 et $\theta_4 = dw$ on obtient :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & e^w & e^w x_3 \\ 0 & e^w & -x_3 e^w & e^w\left(x_2 - \frac{1}{2}x_3^2\right) \\ e^w & 0 & 0 & e^w x_1 \\ 0 & 0 & 0 & e^w \end{pmatrix}$$

Son inverse est donné par :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{e^w} & -\frac{1}{e^w}x_1 \\ \frac{1}{e^w}x_3 & \frac{1}{e^w} & 0 & \frac{1}{2e^w}\left(-2x_2 - x_3^2\right) \\ \frac{1}{e^w} & 0 & 0 & -\frac{1}{e^w}x_3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{e^w} \end{pmatrix}$$

Ce qui fournit la famille de 1-formes exactes suivantes :

$$\begin{pmatrix} e^{-w}dx_1 - e^{-w}x_1 dw \\ e^{-w}x_3 dx_3 + e^{-w}dx_2 - \frac{1}{2}e^{-w}\left(-2x_2 - x_3^2\right)dw \\ e^{-w}dx_3 - e^{-w}x_3 dw \\ e^{-w}dw \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} e^{-w}x_1 \\ e^{-w}\left(\frac{1}{2}x_3^2 + x_2\right) \\ e^{-w}x_3 \\ -e^{-w} \end{pmatrix}$$

Par conséquent ce changement de coordonnées transforme le système dynamique sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 0 \\ \dot{z}_2 = z_1 - \frac{1}{2}e^{2w}z_3^3 \\ \dot{z}_3 = z_2 - \frac{3}{2}e^{w}z_3^2 \\ \dot{w} = e^{w}z_3 \end{cases}$$

Nous allons conclure cette section par quelques remarques [2] :

Remarque 4.8. (1) Si le nouveau repère τ^2 n'est pas commutatif, alors on augmente la dynamique dans espace de dimension $n+2$.

(2) Cette procédure peut se répéter $n-2$ fois. C'est-à-dire le système dynamique peut éventuellement se linéariser modulo une injection de sortie et des variables auxiliaires dans espace de dimension $2n-2$. En particulier pour $n=2$ la seule possibilité étant le difféomorphisme sur la sortie.

5. Conclusion

Dans cette note, pour montrer une application de la forme compagnon, je me suis permis de survoler une trentaine d'années de résultats sur la linéairisation de l'erreur de l'observation. Il s'agit des conditions qui permettent de concevoir un observateur dont l'erreur est sous la forme compagnon (Brunovsky).
Je me suis aussi permis de formaliser à ma manière quelques résultats d'autres chercheurs. Cependant tout énoncé au développement erroné dans ce papier est sous ma seule responsabilité.
Je finis par remercier au nom du l'ENSI de Bourges et de son Directeur de l'ENSI de Bourges Monsieur Joël Allain, Supméca et en particulier Monsieur Stéphane Dugowson pour l'organisation de la journée des mathématiques.

Bibliographie

[1] R. Abraham and Marsden J. E. *Foundation of Mechanics.* Princeton, New Jersey., Princeton, New Jersey., 1966.

[2] B. Boutat. Geometrical conditions to linearize observer error via $0, 1, ..., (n-2) - \int$. *7th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems Nolcos*, 2007.

[3] A. G. Fossard et Normand-Cyrot. *Systèmes non linéaires : miodélisation-estimation.* Masson, 1993.

[4] M. Fliess and Kupka I. A finiteness criterion for nonlinear input-output differential systems. *SIAM J. Control Optim*, 21 :1983, 721–728.

[5] Yu K.T. J. Back and Seo J.H. Dynamic observer error linearization. *in Proc. of IEEE CDC*, 2005. 44, 6364–6369.

[6] R.E. Kalman and Bucy R.S. New results in linear filtering and prediction theory. *J. Basic. Eng,*, page 1961, 95–108.

[7] A.J. Krener and Isidori A. A linearization by output injection and nonlinear observer. *Systems and Control Letters*, 3 :1983, 47–52.

[8] A.J. Krener and Respondek W. A nonlinear observer with linearizable error dynamics. *SIAM J. Control Optim*, 30 :1985, 197–216.

[9] C.G. Luenberger. An introduction to observers. *IEEE Automatica Control*, 16 :1971, 596–602.

[10] C.G. Luenberger. Observing the state on a linear system. *IEEE Trans. Mil. Electron*, 8 :1964, 74–80.

Driss Boutat
ENSI de Bourges
Institut PRISME
10 Bd Lahitolle 18020 Bourges France
FRANCE
driss.boutat@ensi-bourges.fr