Institut Supérieur de Mécanique de Paris
Cours de mathématiques
septembre 2011

Introduction à la notion de tenseur

par Stéphane Dugowson
s.dugowson@gmail.com

type	tenseur	1ère base	coeff. 1	2ème base	coeff. 2	rel. bases	rel. coeff.
$T^{0,0} = \mathbf{K}$	λ	1	λ	1	λ	$1 = 1$	$\lambda = \lambda$
$T^{1,0}(X) = X$	x	(e)	$(e)U = u^i e_i$	(f)	$(f)V = v^i f_i$	$(f) = (e)P$	$V = P^{-1}U$
$T^{0,1}(X) = X^*$	ξ	(ϵ)	$M(\epsilon) = \mu_i \epsilon^i$	(φ)	$N(\varphi) = \nu_i \varphi^i$	$(\epsilon) = P(\varphi)$	$N = MP$
$T^{1,1}(X) = \mathcal{L}(X)$	r	$e_i \otimes \epsilon^j$	a^i_j	$f_i \otimes \varphi^j$	b^i_j	$e_i \otimes \epsilon^j = q^k_i (f_i \otimes \varphi^j) p^j_l$	$B = P^{-1}AP$
$T^{0,2}(X) = \mathcal{B}(X, \mathbf{K})$	s	$\epsilon^i \otimes \epsilon^j$	c_{ij}	$\varphi^i \otimes \varphi^j$	d_{ij}	$\epsilon^i \otimes \epsilon^j = p^i_k (\varphi^k \otimes \varphi^l) p^j_l$	$D = {}^tPCP$

FIGURE 1 – Récapitulatif des tenseurs usuels d'ordre ≤ 2

Présentation

0.1 Pourquoi parle-t-on de tenseurs ?

Comment exprimer mathématiquement les contraintes qui s'exercent en chaque point d'un milieu continu (solide, fluide, etc.) ? Les *scalaires* permettent certes d'exprimer des pressions, et les *vecteurs* des forces, mais ces entités mathématiques s'avèrent insuffisantes : une contrainte en un point d'un milieu continu n'est pas une simple pression ni même représentable par un unique vecteur force. Alors qu'un scalaire est la donnée d'un nombre, et qu'il en faut trois pour représenter un vecteur (une base ayant été choisie), six nombres au moins sont nécessaires à l'expression d'une telle contrainte. On s'est rendu compte que ces six scalaires caractérisaient, dans une base donnée, une matrice 3×3 symétrique. Mais, de même qu'un vecteur est un être mathématique indépendant du choix d'une base et qu'il ne se résume donc pas à ses trois coordonnées, de même les six coefficients en question se rapportent en fait à une entité mathématique qui existe par elle-même « en amont » de ces coefficients : un tenseur.

Le mot *tenseur* vient donc bien de l'idée d'exprimer, entre autre, des sortes de *tensions*, des contraintes, etc. Mais la notion de tenseur se révèle d'une grande généralité, avec des applications dans bien d'autres domaines que la seule mécanique des milieux continus (électromagnétisme, relativité, géométrie différentielle).

Remarque 1. Un scalaire, un vecteur, une forme linéaire, une forme bilinéaire, une application linéaire sont, nous le verrons, des tenseurs particuliers.

Dans ce cours, on a choisi de prendre pour scalaires le corps des réels $\mathbf{R}$, aussi les espaces vectoriels considérés seront tous réels. Cela dit, les choses ne seraient pas fondamentalement différentes pour un autre corps, en particulier $\mathbf{C}$.

0.2 Le principe de construction des tenseurs

La notion de tenseurs repose sur deux extensions différentes de la notion d'espace vectoriel : les variétés et les produits tensoriels.

0.2.1 Variétés et champs de tenseurs

La première extension est plutôt une extension de la notion d'espace affine, elle consiste à faire appel à des espaces courbes plutôt qu'aux espaces affines qui sont en quelque sorte trop rectilignes pour de nombreuses applications. Ces espaces courbes, appelées des variétés, ressemblent néanmoins aux espaces affines, mais uniquement de façon locale, au voisinage de chaque point. Grâce à cette ressemblance, on peut construire en chaque point d'une variété des vecteurs tangents, et une famille de vecteurs tangents, un pour chaque point de la variété, s'appelle un champ de vecteurs. Plus généralement, on peut définir des tenseurs variant de point en point, constituant ainsi des champs de tenseurs. Très souvent, lorsqu'on parle de *tenseur*, on veut dire *champ de tenseurs*.

Toutefois, à notre niveau, nous ne présenterons pas la théorie des variétés : nos espaces ne seront pas courbés, ce seront des (parties d')espaces affines . De plus, le but de cette introduction concerne la définition des tenseurs en eux-mêmes, plutôt que des champs de tenseurs.

0.2.2 Produit tensoriel

La deuxième extension va découler d'une opération mathématique essentielle, à la fois très simple et très abstraite : le produit tensoriel. Ce produit tensoriel constitue le principe fondamental de construction des tenseurs, car il permet de fabriquer de nouveaux types de tenseurs à partir des deux types de tenseurs fondamentaux que sont les vecteurs de l'espace de base et les formes linéaires sur cet espace, c'est-à-dire les vecteurs de l'espace dual.

Remarque 2 (Primal, dual, bidual). Quelle est la différence entre un vecteur et une forme linéaire ? On pourrait dire, en s'appuyant sur l'existence (en dimension finie) d'un isomorphisme canonique entre l'espace primal et le bidual : *la différence entre un vecteur et une forme linéaire, c'est qu'une forme linéaire associe un scalaire à tout vecteur, alors qu'un vecteur associe un scalaire à toute forme linéaire.* Par contre, même si un espace vectoriel de dimension finie X et son dual X^* sont toujours isomorphes (ils ont même dimension), on ne peut généralement pas les identifier, car il n'y a pas d'isomorphisme canonique entre eux. La dualité entre eux peut s'exprimer par le fait que les vecteurs de X s'identifient à des applications linéaires $\mathbf{R} \longrightarrow X$ (pourquoi ?), tandis que les formes linéaires sont des applications linéaires $X \longrightarrow \mathbf{R}$. Dans le cas particulier, mais très fréquent dans les applications, où l'espace X est muni d'une structure euclidienne, il y a alors un isomorphisme entre X et X^* naturellement associée à cette structure. C'est par exemple un tel isomorphisme qui permet de définir le *vecteur gradient* d'une fonction *numérique* (*i.e.* à valeur dans $\mathbf{R}$) définie sur un espace euclidien X. De même, c'est cet isomorphisme qui permet de « rapatrier » dans X la base duale d'une base de X : la base duale d'une base de X est une base de X^*, mais lorsque X est euclidien, celle-ci peut être représentée par une deuxième base de X, qu'on appelle aussi, par un léger abus, « base duale » (voir à ce sujet la section 2.10).

On peut aborder le produit tensoriel à partir de la question toute bête suivante :

Qu'est-ce que le produit de deux vecteurs ?

1 Produit tensoriel de deux espaces vectoriels

La notion de produit tensoriel répond à la question : quel est le produit le plus général qui puisse être fait d'un vecteur $x \in X$ par un vecteur $y \in Y$?

Remarque 3. L'opération désignée en français comme *produit vectoriel* ne répond pas à cette question, car il s'agit d'une opération très spécifique, qui ne fonctionne que dans le seul cas où $X = Y$ est l'espace euclidien orienté à trois dimensions, opération notée $\wedge$ en français, comme le produit extérieur donc (dont il est une espèce de repliement), alors qu'on l'appelle « cross product » en anglais, et qu'on le note $\times$ dans la littérature anglophone. A noter que ce « produit vectoriel » là n'est pas associatif : il mérite à peine le nom de produit.

1.1 Qu'est-ce qu'un produit ?

En premier lieu, un produit entre les éléments de X et ceux de Y est une opération $\times$ définie sur l'espace $X \times Y$ des couples : à tout couple, une telle opération produit associe... quelque chose... mais quoi ? autrement dit, quel sera l'espace d'arrivé d'une telle opération ? En général, on n'a pas de raison de supposer que ce produit doive nécessairement appartenir ni à X ni à Y (de fait, en ce qui concerne par exemple le produit particulier que nous allons définir dans cette section, produit que nous noterons $x \otimes y$ et que nous appellerons produit tensoriel, l'espace d'arrivée de cette opération, noté $X \otimes Y$, sera le plus souvent distinct de X et de Y).

Remarque 4. La notion de produit cartésien de deux espaces vectoriels est tout-à-fait essentielle (on vient d'ailleurs de l'utiliser pour parler de l'espace des couples), mais si elle constitue un produit *des espaces*, elle ne consiste aucunement en une multiplication *des vecteurs* eux-même. Par exemple, le couple $(0, y)$ est non nul (si y est non nul), tandis que pour un produit de vecteurs digne de ce nom, on peut s'attendre à ce que 0 fois y donne 0...

Examinons donc pour commencer les propriétés qu'une opération doit avoir pour qu'on puisse la désigner comme un produit de vecteurs. Comme nous ne considérons pour l'instant que le produit de deux vecteurs pris dans des espaces différents, la question de l'associativité ne se pose pas encore, et celle de la commutativité encore moins. Par contre, X et Y étant des espaces vectoriels, se pose la question des relations entre un tel produit $\times$ et les opérations propres à ces espaces vectoriels. Les propriétés suivantes sont très naturelles :

- $\forall x_1, x_2 \in X, \forall y \in Y, (x_1 + x_2) \times y = x_1 \times y + x_2 \times y$,
- $\forall x \in X, \forall y \in Y, \forall \lambda \in \mathbf{R}, (\lambda x) \times y = \lambda(x \times y)$,

et de même de l'autre coté :

- $\forall x \in X, \forall y_1, y_2 \in Y, x \times (y_1 + y_2) = x \times y_1 + x \times y_2$,
- $\forall x \in X, \forall y \in Y, \forall \lambda \in \mathbf{R}, x \times (\lambda y) = \lambda(x \times y)$.

Ces propriétés expriment ni plus ni moins que la *bilinéarité* du produit : une opération « produit de vecteurs » n'est rien d'autre qu'une application bilinéaire agissant sur des couples de vecteurs.

Exercice : prouver que si $\times$ vérifie les propriétés précédentes, on a nécessairement $0 \times y = 0$ pour tout y.

1.2 Universalité

Il existe une infinité de produits possibles, c'est-à-dire d'applications bilinéaires $X \times Y \to Z$, mais nous voulons maintenant considérer le produit « le plus général » possible, et c'est celui-là que nous appellerons le produit tensoriel. Par exemple, l'application triviale $X \times Y \to \{0\}$ est bien un produit, mais il n'a rien de général ou d'universel, c'est un produit extrêmement particulier et, en l'occurence, sans aucun intérêt. De même, si nous trouvons une opération bilinéaire $X \times Y \to Z$ qui semble répondre à la question, nous obtiendrons un autre produit en injectant Z dans un espace Z' plus gros, contenant Z, mais les nouveaux éléments ajoutés à Z pour obtenir Z' n'auront aucun intérêt vis-à-vis de l'opération qui nous intéresse. Finalement, pour le dire de façon un peu vague, le produit tensoriel sera l'application $X \times Y \to Z$ ayant pour seule propriété d'être bilinéaire, avec pour Z l'espace vectoriel le plus petit possible compatible avec cette exigence, et cet espace Z sera noté $X \otimes Y$.

En pratique, l'opération $\otimes : X \times Y \to X \otimes Y$ sera régie par les propriétés de bilinéarité écrites précédemment, et aucune autre (ainsi, dans le cas où $X = Y$, l'opération considérée ne sera pas commutative). Le fait qu'il n'y ait pas d'autre propriété confère à ce produit une position particulière parmi toutes les opérations « produit » possibles, qu'exprime la « propriété universelle » suivante :

Proposition 1 (Propriété universelle du produit tensoriel)**.** *Toute application bilinéaire $p : X \times Y \to Z$ se factorise de façon unique selon $X \times Y \to X \otimes Y \to Z$, où la première application est le produit tensoriel et la seconde est une application linéaire $\tilde{p}$ associée à p.*

Remarque 5. Noter que *bilinéaire* signifie en quelque sorte deux fois *moins* linéaires plutôt que deux fois plus, dans la mesure où une application bilinéaire n'est que *partiellement* linéaire, puisqu'elle n'est linéaire que par rapport à chacune des deux variables, de façon séparée.

Ainsi, toute opération *produit* peut être définie en faisant suivre le produit tensoriel d'une application linéaire. Le produit tensoriel est donc bien « le produit le plus général » que l'on puisse considérer (à l'opposé, le produit trivial nul est le moins général de tous, car il ne conduit à aucun autre que lui-même).

Construction du produit tensoriel de deux espaces vectoriels (rappelons que tous les espaces vectoriels considérés sont définis sur le même corps, par exemple $\mathbf{R}$) : c'est technique mais au fond assez simple : on considère l'espace vectoriel librement engendré par tous les couples, et on fait un quotient de cet énorme machin par les relations de bilinéarité souhaitées. Je ne détaille pas cela ici (voir n'importe quel ouvrage de référence sur le sujet).

Une autre construction, non canonique, est beaucoup plus simple à comprendre et à utiliser en pratique (mais elle présente l'inconvénient de donner le sentiment, faux, que le produit tensoriel dépendrait en lui-même du choix de bases) :

Proposition 2. *Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de l'espace X et $(f_j)_{j\in J}$ est une base de l'espace Y, alors la famille $(e_i \otimes f_j)_{(i,j)\in I\times J}$ constitue une base de l'espace vectoriel $X \otimes Y$. En particulier, si X est de dimension finie n et Y de dimension finie p, alors $X \otimes Y$ est de dimension finie np.*

Remarque 6. On remarque que le corps de base lui-même, considéré comme espace de dimension 1 sur lui-même, est (à isomorphisme près) l'élément neutre du produit tensoriel des espaces vectoriels.

Remarque 7. Tout élément de l'espace $X \otimes Y$ ne s'écrit pas nécessairement sous la forme d'un produit tensoriel de vecteurs $x \otimes y$, mais plutôt sous la forme d'une somme finie $\Sigma\lambda^{ij} e_i \otimes f_j$ de tels produits (nous avons placé en haut les indices i et j des coefficients λ^{ij} pour des raisons qui apparaîtront plus tard ; cette position inhabituelle ne doit pas les faire confondre avec des puissances).

2 Les tenseurs de divers types

2.1 Définition des tenseurs de divers types

Le terme tenseur ne désigne pas n'importe quel élément d'un produit tensoriel d'espaces vectoriels quelconques, mais les élements d'espaces spécifiques construits à partir d'un espace de travail, disons X :

Definition 1 (Espaces de tenseurs). *On pose $T^{p,q}(X) = T^p(X) \otimes T^q(X^*)$, où X est un espace vectoriel donné, de dimension finie et où $T^p(X)$ désigne la puissance tensorielle $p^{\text{ième}}$ de X*

$$T^p(X) = \underbrace{X \otimes X \otimes ...X}_{p}$$

Les éléments de $T^{p,q}(X)$ sont appelés les tenseurs *de type (p, q) (sur X), ou encore tenseurs p fois* contravariants *et q fois* covariants.

Remarque 8. On a déjà signalé qu'en pratique, l'espace X dépendra souvent d'un point M décrivant une variété $\mathcal{M}$; plus précisément, un tel espace $X =$

X_M coïncidera généralement avec l'espace tangent à la variété $\mathcal{M}$ en ce point M. Le fait de choisir (de façon assez régulière) pour chaque point M un tenseur de type (p,q) sur l'espace tangent X_M revient alors à définir un *champs de tenseurs* de type (p,q) sur la variété considérée. Les notions de fonctions numériques, de champs de vecteurs, de formes différentielles sont des cas particuliers de champs de tenseurs.

2.2 Notations

Dans tout ce qui suit, X désigne donc un espace vectoriel fixé, de dimension finie n. On considère deux bases de X : $(e) = (e_1, ..., e_n)$, appelée la première (ou l'ancienne) base, et $(f) = (f_1, ..., f_n)$, appelée la seconde (ou la nouvelle) base.

Pour chaque type (p,q) de tenseur considéré, les deux bases (e) et (f) de X définissent naturellement deux bases de $T^{p,q}(X)$. L'objet des formules qui suivent est essentiellement de préciser la manières dont sont transformées les coordonnées des tenseurs considérées lorsqu'on effectue dans X le changement de bases $(e) \longrightarrow (f)$, ce changement entraînant à son tour un changement de bases dans $T^{p,q}(X)$. Dans ce but, nous devons commencer par préciser les formules relatives au changement de base dans X, exprimé par une matrice de passage que nous noterons P.

2.3 Changement de bases de vecteurs, matrice de passage

2.3.1 Formule explicite

Le changement de base $(e) \to (f)$ est défini par des relations de la forme

$$\forall j \in \{1, ..., n\}, f_j = \sum_{i=1}^{i=n} p^i_j e_i, \tag{1}$$

où les indices i placés en haut sont bien des *indices* (et non des puissances). La formule ci-dessus exprime que la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $P = (p^i_j)$, appelée *matrice du passage* de (e) à (f), $\begin{pmatrix} p^1_j \\ \vdots \\ p^n_j \end{pmatrix}$, est constituée des coordonnées du vecteur f_j dans la base (e).

2.3.2 Convention d'Einstein

La convention d'Einstein consiste à faire l'économie du symbole $\sum$ en convenant que chaque fois qu'un indice apparaît deux fois dans une formule, une fois en haut (indice contravariant) et une fois en bas (indice covariant), la somme sur cet indice est implicite. Dans le cas de la formule (1) ci-dessus, elle conduit à écrire que, pour tout indice $j \in \{1, ..., n\}$, on a

$$f_j = p_j^i e_i. \tag{2}$$

Remarque 9. Certains auteurs emploient la convention d'Einstein, mais sans placer en position haute les indices contravariants. Dans ce cas, la convention d'Einstein revient simplement à considérer comme implicites les sommes sur les indices répétés deux fois.

2.3.3 Formule matricielle

La formule de changement de base ci-dessus peut prendre une forme matricielle très commode, au prix de deux modifications quant aux notations habituelles : d'une part les vecteurs seront multipliés par des scalaires *à droite* (et non, comme on le fait habituellement, à gauche) ; d'autre part, on se permet de considérer des matrices dont les coefficients seront non plus des scalaires, mais également des vecteurs (voire d'autres tenseurs...)

En multipliant les vecteurs par les scalaires à droite, la formule (2) s'écrira plutôt

$$f_j = e_i p_j^i, \tag{3}$$

relation que l'on peut alors exprimer sous forme matricielle par

$$(f) = (e)P, \tag{4}$$

où (f) s'identifie à la matrice ligne dont les coefficients sont les vecteurs f_i, (e) s'identifie de même à la matrice ligne définie par les e_i, et P est la matrice de passage $(e) \to (f)$.

Remarque 10. La matrice de passage P est nécessairement inversible. Notons $Q = (q_j^i)$ sa matrice inverse. On a alors $PQ = QP = I_n$, soit, en termes de coefficients et en suivant la convention d'Einstein

$$p_k^i q_j^k = q_k^i p_j^k = \delta_j^i, \tag{5}$$

où δ_j^i désigne le symbole de Kronecker, c'est-à-dire les coefficients de la matrice identité. On en déduit par exemple l'expression des vecteurs de la première base en fonction de ceux de la seconde en écrivant simplement $f_j q_i^j = e_k p_j^k q_i^j = e_k \delta_i^k = e_i$, d'où la formule

$$e_i = f_j q_i^j. \tag{6}$$

2.4 Tenseurs d'ordre 0

$T^{(0,0)}(X) = \mathbf{R}$: les tenseurs d'ordre 0 sont les scalaires. La famille constituée du seul nombre 1 forme la base canonique de cet espace. Le changement de base $(e) \to (f)$ sur l'espace de travail X n'entraîne aucune variation dans l'expression des scalaires, c'est pourquoi ceux-ci sont dit 0 fois contravariant et 0 fois covariants.

Remarque 11. Rappelons que le corps des réels constitue un élément neutre pour le produit tensoriel des espaces vectoriels réels.

2.5 Tenseurs de type $(1,0)$: l'espace primal X

$T^{1,0}(X) = X$ est l'espace de travail X lui-même, parfois appelé *espace primal* par opposition à son dual. Les tenseurs de type $(1,0)$ sont donc les *vecteurs* (sous-entendus : de X). Soit $x \in X$ un tel vecteur. Nous allons exprimer les relations entre ses composantes dans les deux bases (e) et (f).

2.5.1 Notations explicites

Remarque 12. Pour la clarté de l'exposé, je rappelle dans cette section comment établir explicitement les formules de changement de base pour les vecteurs, mais le lecteur est invité à remarquer que les sections suivantes 2.5.2 et 2.5.3 contiennent les mêmes formules, écrites de façon nettement plus condensée.

L'expression du vecteur x dans la base (e) s'appuie sur l'existence d'un unique n-uplet $(u^i)_{i=1,\dots,n}$ de scalaires tel que

$$x = \sum_{i=1}^{i=n} u^i e_i. \tag{7}$$

Rappelons que, dans cette notation, l'indice i du coefficient u^i ne désigne pas une puissance, il est placé en haut en référence au comportement « contravariant » de ces coefficients lors d'un changement de base, ce que nous détaillons maintenant. L'expression du même vecteur x dans la base (f) s'écrit

$$x = \sum_{i=1}^{i=n} v^i f_i, \tag{8}$$

ou encore, de façon équivalente, en changeant le nom de la variable muette i en j,

$$x = \sum_{j=1}^{j=n} v^j f_j, \tag{9}$$

pour un certain n-uplet $(v^i)_{i=1,\ldots,n}$.

En remplaçant chaque f_j selon la formule (1), on obtient

$$x = \sum_{j=1}^{j=n} v^j \sum_{i=1}^{i=n} p^i_j e_i = \sum_{i=1}^{i=n} (\sum_{j=1}^{j=n} p^i_j v^j) e_i, \tag{10}$$

d'où, en rapprochant cette dernière expression de la formule (7)

$$\forall i, u^i = \sum_{j=1}^{j=n} p^i_j v^j. \tag{11}$$

Les coefficients de passage p^i_j de l'ancienne base (e) vers la nouvelle base (f) permettent donc l'expression directe des anciennes coordonnées u^i de x en fonction des nouvelles coordonnées v^j : cette inversion explique le terme « contravariant » utilisé pour qualifier le comportement des composantes des vecteurs $x \in X$ de l'espace primal... puis, par une extension que l'on pourrait juger regrettable (mais comme je dis souvent :« ainsi va la vie »), le terme « contravariant » a été gardé pour désigner les vecteurs eux-mêmes. D'où, plus généralement, le fait que les tenseurs de type (p, q) soient dit p fois contravariants et q fois covariants (alors qu'en eux-mêmes, les tenseurs sont invariants, au sens où ce sont leurs coordonnées qui varient dans les changements de bases, pas eux...).

2.5.2 Notations tensorielles

Avec la convention d'Einstein, l'expression du vecteur x dans la base (e) s'écrit

$$x = e_i u^i, \tag{12}$$

et l'expression du même vecteur x dans la base (f) s'écrit

$$x = f_i v^i = f_j v^j. \tag{13}$$

En remplaçant chaque f_j selon la formule (3), on obtient

$$x = e_i p^i_j v^j, \tag{14}$$

d'où l'on déduit

$$\forall i, u^i = p^i_j v^j, \tag{15}$$

formule équivalente à la formule (11).

2.5.3 Notations matricielles

En notations matricielles, l'expression du vecteur x dans la base (e) peut s'écrire

$$x = (e)U, \tag{16}$$

où U désigne la matrice-colonne constituée des n scalaires u^i. Comme nous l'avons déjà remarqué, une telle écriture suppose d'une part de s'autoriser à multiplier des vecteurs par des scalaires placés à leur droite, et d'autre part de considérer des matrices à coefficients non seulement scalaires, mais aussi vectoriels.

L'expression du vecteur x dans la base (f) s'écrit de même

$$x = (f)V. \tag{17}$$

En remplaçant (f) selon la formule (4), on obtient

$$x = (e)PV, \tag{18}$$

d'où l'on déduit

$$U = PV, \tag{19}$$

formule équivalente aux formules (11) et (15).

Lorsque l'on veut écrire les nouvelles coordonnées du vecteur x en fonction des anciennes, cette formule s'écrit

$$V = P^{-1}U. \tag{20}$$

Conformément à ce que nous avons dit plus haut, le terme *contravariant* employé pour désigner les vecteurs de $X = T^{(1,0)}(X)$ correspond à l'*inversion* de la matricie P dans cette équation (20).

2.6 Tenseurs de type $(0,1)$: l'espace dual X^*

2.6.1 Bases duales en notation matricielle

Parce qu'elle simplifie considérablement l'écriture, et bien qu'elle implique une certaine vigilance dans l'extension du calcul matriciel qu'elle nécessite, nous écrivons directement en notation matricielle la relation entre les bases duales de (e) et (f), quitte à ce que le lecteur prenne le temps de retraduire ces calculs en termes plus classiques.

Notons $(\epsilon) = \begin{pmatrix} \epsilon^1 \\ \vdots \\ \epsilon^n \end{pmatrix}$ la base de X^* définie comme base duale de la base (e) de X. Pour la compatibilité avec le calcul matriciel, (ϵ) est donc identifié ici à une matrice-colonne, dont les coefficients sont non pas des scalaires, mais des formes linéaires sur X, la forme linéaire ϵ^i étant définie comme la $i^{\text{ème}}$ coordonnée dans la base (e), c'est-à-dire l'unique forme linéaire telle que $\epsilon^i(e_j) = \delta^i_j$. Notons de même (φ) la base duale de (f).

Remarque 13. Puisqu'il n'existe pas d'isomorphisme canonique entre un espace vectoriel de dimension finie et son dual, chaque forme linéaire ϵ^i ne saurait dépendre du seul vecteur e_i, mais dépend au contraire de *toute* la base (e).

La relation de dualité entre les bases (e) et (ϵ) se traduit alors matriciellement par deux relations distinctes. On a d'une part

$$(\epsilon)(e) = I_n, \tag{21}$$

où I_n désigne la matrice identité d'ordre n.

L'équation (21) dit que le produit de la matrice-colonne (ϵ) par la matrice-ligne (e) donne la matrice carrée $n \times n$ dont les coefficients sont les scalaires $\epsilon^i(e_j)$, le produit d'une forme linéaire par un vecteur à droite étant compris comme l'action de cette forme linéaire sur ce vecteur.

D'autre part, la relation entre les deux bases duales se traduit également sous la forme plus subtile suivante

$$(e)(\epsilon) = (Id_X). \tag{22}$$

Dans cette formule (22), le produit d'une matrice ligne à gauche par une matrice colonne à droite donne une matrice 1×1 dont l'unique coefficient n'est ni un scalaire, ni un vecteur, ni une forme linéaire... mais un endomorphisme, à savoir l'endomorphisme *identité* de X. En effet, pour un vecteur w et une forme linéaire ψ, nous désignons par l'écriture (dans cet ordre) $w\psi$ l'endomorphisme de X défini pour tout vecteur u par $u \mapsto w\psi(u)$, où le vecteur w est multiplié (à droite, conformément à nos conventions matricielles) par le scalaire $\psi(u)$. En notations explicites habituelles (avec un produit des vecteurs par les scalaires à gauche) la formule (22) signifie alors simplement que pour tout vecteur u, on a $u = \sum_{i=1,\dots,n} \epsilon^i(u)e_i$.

De même, la relation entre les bases (f) et (φ) s'exprime matriciellement par les relations

$$(\varphi)(f) = I_n \tag{23}$$

et

$$(f)(\varphi) = (Id_X). \tag{24}$$

La formule (4) implique

$$(\epsilon)(f)(\varphi) = (\epsilon)(e)P(\varphi), \tag{25}$$

d'où l'on tire, d'après les formules (24) et (21),

$$(\epsilon) = P(\varphi). \tag{26}$$

2.6.2 Composantes des formes linéaires, en notation matricielle

Soit maintenant $\xi \in X^*$ une forme linéaire sur X. Ses coordonnées $(\mu_1, ..., \mu_n)$ dans la base (ϵ) constituent un vecteur ligne M à coefficients scalaires, tel que

$$\xi = M(\epsilon). \tag{27}$$

De même, les coordonnées $N = (\nu_1, ..., \nu_n)$ de ξ dans la base (φ) vérifient

$$\xi = N(\varphi). \tag{28}$$

La relation matricielle (26) implique alors

$$N = MP. \tag{29}$$

Cette relation « dans le sens direct »(*i.e.* sans avoir à inverser P), au contraire de la formule (20), explique le qulificatif *covariant* employé pour désigner les formes linéaires vues en tant que tenseurs de type $(0, 1)$.

2.6.3 Bases duales en notations tensorielles

La relation (24) peut s'écrire avec la convention d'Einstein

$$f_i \varphi^i = Id_X. \tag{30}$$

Remarque 14. Pour être plus précis, l'expression $f_i \varphi^i$ pourrait être écrite $f_i \otimes \varphi^i = \sum_i f_i \otimes \varphi^i$, le produit tensoriel $u \otimes \psi$ d'un vecteur par une forme linéaire étant précisément l'endomorphisme $x \mapsto \psi(x)u$ (voir plus loin la section 2.7.3).

La relation (21) peut quant à elle s'écrire

$$\epsilon^k e_j = \delta^k_j. \tag{31}$$

La formule (3) conduit alors à

$$\epsilon^k f_i \varphi^i = \epsilon^k e_j p^j_i \varphi^i,$$

d'où $\epsilon^k = p^k_i \varphi^i$, autrement dit

$$\epsilon^i = p^i_j \varphi^j. \tag{32}$$

Si l'on veut exprimer les formes linéaires constituant la base (φ) en fonction de la base (ϵ), il suffit de faire appel à l'inverse de p^k_i d'où, avec les notations de la formule (5)

$$\varphi^j = q^j_k \epsilon^k$$

2.6.4 Composantes des formes linéaires, en notations tensorielles

Avec les notations de la section 2.6.2, on a $\xi = \mu_i \epsilon^i = \nu_i \varphi^i$, d'où $\mu_k \epsilon^k = \nu_j \varphi^j$ puis, d'après (32), $\mu_i p^i_j \varphi^j = \nu_j \varphi^j$, d'où la formule suivante, équivalente à la formule (29) :

$$\nu_j = \mu_i p^i_j. \tag{33}$$

2.7 Tenseurs de type $(1,1)$: endomorphismes

2.7.1 Notations tensorielles

Indépendamment de l'interprétation des tenseurs de type $(1,1)$ comme étant les endomorphismes de l'espace (voir plus loin la section 2.7.3), il est facile d'établir les formules de changement de base qui les concernent. La base (e) de l'espace primal X conduit à la définition d'une base de $T^{(1,1)}(X)$, à savoir la famille des n^2 tenseurs de la forme $e_i \otimes \epsilon^j$. De même, la seconde base,(f), de l'espace primal, conduit à la base $(f_i \otimes \varphi^j)$ de $T^{(1,1)}(X)$.

Un tenseur r de ce type, de coordonnées (a^i_j) dans la première de ces bases et de coordonnée (b^i_j) dans la seconde s'écrit

$$r = a^i_j e_i \otimes \epsilon^j = b^k_l f_k \otimes \varphi^l,$$

d'où

$$r = a^i_j (f_k q^k_i) \otimes (p^j_l \varphi^l) = q^k_i a^i_j p^j_l (f_k \otimes \varphi^l) = b^k_l (f_k \otimes \varphi^l),$$

d'où finalement

$$b^k_l = q^k_i a^i_j p^j_l. \tag{34}$$

2.7.2 Notations matricielles

En rassemblant les coefficients a^i_j (resp. b^i_j) dans une matrice A (resp. B), la formule (34) s'écrit

$$B = P^{-1} A P. \tag{35}$$

2.7.3 Interprétation

La formule (35) suggère que les tenseurs de type $(1,1)$ s'identifient aux endomorphismes de l'espace X : la matrice A (resp. B) s'interprète alors comme la matrice de r dans la base (e) (resp. (f)).

Cette interprétation découle en fait de l'existence d'un isomorphisme canonique entre $T^{(1,1)}(X)$ et l'espace des endomorphismes $\mathcal{L}(X)$. En effet, l'application qui à tout couple $(u, \psi) \in X \times X^*$ associe l'endomorphisme $v \mapsto \psi(v) u$ est une application bilinéaire qui, d'après la propriété universelle du produit tensoriel se factorise de façon unique par une application linéaire $\alpha : T^{(1,1)}(X) \to \mathcal{L}(X)$. Mais puisque les n^2 endomorphismes $v \mapsto \epsilon^j(v)e_i$, qui constituent une base de $\mathcal{L}(X)$, font partie de l'image de α, on en déduit que α est surjective, donc est un isomorphisme puisque les espaces concernés ont même dimension.

2.8 Tenseurs de type $(0,2)$: formes bilinéaires

2.8.1 Notations tensorielles

La base (e) de l'espace primal X conduit à la définition d'une base de $T^{(0,2)}(X)$, à savoir la famille des n^2 tenseurs de la forme $\epsilon^i \otimes \epsilon^j$. De même, la seconde base,(f), de l'espace primal, conduit à la base $(\varphi^i \otimes \varphi^j)$.

Un tenseur s de ce type, de coordonnées (c_{ij}) dans la première de ces bases et de coordonnée (d_{ij}) dans la seconde s'écrit

$$s = c_{ij}\epsilon^i \otimes \epsilon^j = d_{kl}\varphi^k \otimes \varphi^l,$$

d'où, en utilisant deux fois la formule (32) et en réorganisant l'ordre des facteurs,

$$d_{kl} = p^i_k c_{ij} p^j_l. \tag{36}$$

2.8.2 Notations matricielles

En rassemblant les coefficients c_{ij} (resp. d_{ij}) dans une matrice C (resp. D), la formule (36) s'écrit

$$D = P^\dagger C P. \tag{37}$$

2.8.3 Interprétation

La formule (37) suggère que les tenseurs de type $(0,2)$ s'identifient aux formes bilinéaires de l'espace X : la matrice C (resp. D) s'interprète alors comme la matrice de s dans la base (e) (resp. (f)).

Cette interprétation découle en fait de l'existence d'un isomorphisme canonique entre $T^{(0,2)}(X)$ et l'espace des formes bilinéaires $\mathcal{L}_2(X,\mathbf{R})$. En effet, l'application qui à tout couple $(\phi,\psi) \in X^* \times X^*$ associe la forme bilinéaire $(u,v) \mapsto \phi(u)\psi(v) \in \mathbf{R}$ est une application bilinéaire qui, d'après la propriété universelle du produit tensoriel se factorise de façon unique par une application linéaire $\beta : T^{(0,2)}(X) \to \mathcal{L}_2(X,\mathbf{R})$. Mais puisque les n^2 formes bilinéaires $(u,v) \mapsto \epsilon^i(v)\epsilon^j(v)$, qui constituent une base de $\mathcal{L}(X)$, font partie de l'image de β, on en déduit que β est surjective, donc est un isomorphisme puisque les espaces concernés ont même dimension.

2.9 Tenseurs de type $(2, 0)$

Je ne parlerai pas ici de ces tenseurs.

2.10 Equivalence euclidienne entre formes bilinéaires et endomorphismes

Si l'espace X est muni d'une structure euclidienne, c'est-à-dire d'un produit scalaire, il existe alors un isomorphisme entre X et son dual canoniquement associé à cette structure. Dans ces conditions, la différence entre covariance et contravariance tend à s'estomper. Cela se manifeste par exemple par le fait que, tant que l'on se limite à des changements de bases orthonormées, la matrice de passage étant alors orthogonale, c'est-à-dire telle que $P^\dagger = P^{-1}$, les formules (35) et (37) coïncident. De fait, *via* le produit scalaire d'un tel espace X, toute forme bilinaire q sur X se représente de façon unique par un endomorphisme p tel que $q(u, v) = u.p(v)$, et dans une base orthonormée quelconque p et q auront les mêmes matrices.

Par ailleurs, notons que la donnée d'une telle structure euclidienne sur X permet également de « rapatrier » dans X la base duale (ϵ) d'une base quelconque (non nécessairement orthonormée) (e) de X. La base de X ainsi obtenue, disons (e'), admet pour $i^{\text{ème}}$ vecteur e'_i qui représente, *via* le produit scalaire, la forme linéaire « $i^{\text{ème}}$ coordonnée »ϵ^i définie par $\epsilon^i(e_j) = \delta^i_j$. Autrement dit, $e'_i.e_j = \delta_i j$. C'est parfois cette base (e') que certains auteurs appellent, par un léger abus de langage bien compréhensible, la base duale. Son intérêt est de pouvoir exprimer la $i^{\text{ème}}$ coordonnée λ_i d'un vecteur u dans la base (e) par une formule analogue à celle employée dans le cas particulier d'une base orthonormée, à la simple condition d'y ajouter un $'$, à savoir

$$\lambda_i = u.e'_i.$$

Dans le cas où la base (e) est orthonormée, on a bien sûr $(e') = (e)$.

2.11 Tenseurs d'ordres supérieurs : limites de la notation matricielle

En général, les tenseurs d'ordre strictement supérieurs ne peuvent plus être exprimés dans le cadre du calcul matriciel, tandis que les notations indicielles fonctionnent parfaitement.

Néanmoins, certains morceaux du calcul tensoriel d'ordre 4 peuvent encore être sauvés dans le calcul matriciel. Ainsi, un tenseur d'ordre 4 sur $X = \mathbf{R}^3$ présentant certaines symétries peut être représenté par un tenseur d'ordre 2 dans $\mathbf{R}^6$. Le lecteur intéressé pourra consulter l'article de Maher Moakher intitulé « The algebra of fourt-order tensors with application to diffusion MRI » publié dans l'ouvrage *Visualization and Processing of Tensor Fields, Advances and Perspectives* (Springer, 2009).

Table des matières

2.12 Récapitulatif

type	tenseur	1ère base	coeff. 1	2ème base	coeff. 2	rel. bases	rel. coeff.
$T^{0,0} = \mathbf{K}$	λ	1	λ	1	λ	$1 = 1$	$\lambda = \lambda$
$T^{1,0}(X) = X$	x	(e)	$(e)U = u^i e_i$	(f)	$(f)V = v^i f_i$	$(f) = (e)P$	$V = P^{-1}U$
$T^{0,1}(X) = X^*$	ξ	(ϵ)	$M(\epsilon) = \mu_i \epsilon^i$	(φ)	$N(\varphi) = \nu_i \varphi^i$	$(\epsilon) = P(\varphi)$	$N = MP$
$T^{1,1}(X) = \mathcal{L}(X)$	r	$e_i \otimes \epsilon^j$	a^i_j	$f_i \otimes \varphi^j$	b^i_j	$e_i \otimes \epsilon^j = q^k_i (f_i \otimes \varphi^j) p^j_l$	$B = P^{-1}AP$
$T^{0,2}(X) = \mathcal{B}(X, \mathbf{K})$	s	$\epsilon^i \otimes \epsilon^j$	c_{ij}	$\varphi^i \otimes \varphi^j$	d_{ij}	$\epsilon^i \otimes \epsilon^j = p^i_k (\varphi^k \otimes \varphi^l) p^j_l$	$D = {}^t PCP$