

II. Les distributions d'une variable réelle

S. Dugowson

stephane.dugowson@supmeca.fr

6 septembre 2011

Introduction

0.1 Comment représenter une charge ponctuelle ?

0.2 Convolution : la quête de l'unité

0.3 Passif/Actif : La dualité comme principe de généralisation

1 Définition des distributions

1.1 Un espace de fonctions test

1.2 Représentation des fonctions continues

1.3 Notion de fonction localement intégrable

1.3.1 Intégrale de Riemann/intégrale de Lebesgue

Une extension nécessaire. De nouveaux théorèmes. Compatibilité. Intégrales impropres. Axe orienté/droite réelle.

1.3.2 Espace des fonctions intégrables

1.3.3 Cardinal des parties de l'axe réel

1.3.4 Fonctions négligeables, égalité presque partout

1.3.5 Espaces des fonctions localement intégrables

Rq : les fonctions continues sont localement intégrables.

- 1.4 Représentation des fonctions localement intégrables
- 1.5 Dualité algébrique/dualité topologiques
- 1.6 Topologie séquentielle de \mathcal{D}
- 1.7 Définition des distributions de la variable réelle
- 1.8 Exemples de distributions
- 1.9 Injection des fonctions localement intégrables dans l'espace des distributions
- 1.10 Distributions régulières, distributions singulières

2 Structure des distributions

2.1 Un espace vectoriel topologique

2.2 Support

Support d'une fonction continue. Distributions nulles sur un ouvert de \mathbf{R} .
Support d'une distribution. Exemple : support du Dirac.

2.3 Translation

Support d'une distribution translatée. Distributions périodiques.

2.4 Transposition

Distributions paires ; impaires.

2.5 Changement d'échelle

2.6 Produit par une fonction régulière

2.7 Dérivée des distributions

Définition. Exemples. Dérivée d'une somme, d'un produit. Dérivées des fonctions dérivables par morceaux.

Prop : $T' = 0 \Rightarrow T$ constante.

Définition : primitive d'une distribution.

3 Suites et séries de distribution

- Rappel : définition de la convergence.
- Rq : il suffit qu'il existe une limite *ponctuelle*.
- La convergence uniforme dans L^1_{loc} implique convergence dans \mathcal{D} .
- Approximation du Dirac.
- Continuité de la dérivation.

4 Distributions à support compact

- Rq : support d'une fonction localement intégrable.
- Utilité d'étendre le domaine de fonctions test.
- Deux définitions des distribution à support compact.
- Intégrale d'une distribution à support compact.

Table des matières

0.1	Comment représenter une charge ponctuelle?	1
0.2	Convolution : la quête de l'unité	1
0.3	Passif/Actif : La dualité comme principe de généralisation . . .	1
1	Définition des distributions	1
1.1	Un espace de fonctions test	1
1.2	Représentation des fonctions continues	1
1.3	Notion de fonction localement intégrable	1
1.3.1	Intégrale de Riemann/intégrale de Lebesgue	1
1.3.2	Espace des fonctions intégrables	1
1.3.3	Cardinal des parties de l'axe réel	1
1.3.4	Fonctions négligeables, égalité presque partout	1
1.3.5	Espaces des fonctions localement intégrables	1
1.4	Représentation des fonctions localement intégrables	2
1.5	Dualité algébrique/dualité topologiques	2
1.6	Topologie séquentielle de \mathcal{D}	2
1.7	Définition des distributions de la variable réelle	2
1.8	Exemples de distributions	2
1.9	Injection des fonctions localement intégrables dans l'espace des distributions	2
1.10	Distributions régulières, distributions singulières	2

2	Structure des distributions	2
2.1	Un espace vectoriel topologique	2
2.2	Support	2
2.3	Translation	2
2.4	Transposition	2
2.5	Changement d'échelle	2
2.6	Produit par une fonction régulière	2
2.7	Dérivée des distributions	2
3	Suites et séries de distribution	3
4	Distributions à support compact	3