III. Produit de convolution des distributions

S. Dugowson

stephane.dugowson@supmeca.fr

13 octobre 2011

Introduction

Avertissement. Ceci n'est pas un poly, mais un document incomplet dont la fonction principale est d'indiquer la structure du cours : sections et sous-sections. Pour des documents complets, les étudiants peuvent consulter les références à plusieurs reprises données aux étudiants. A ces références s'ajoute celle-ci, en particulier pour le produit de convolution des fonctions classiques [1]

http ://fr.wikipedia.org/wiki/Produit_de_convolution

0.1 Comportement d'un barreau visco-élastique linéaire

L'expression de la déformation $\epsilon(t)$ au cours du temps d'un barreau visco-élastique linéaire soumis à une contrainte $\sigma(t)$ montre comment le produit de convolution des fonctions apparaît naturellement, avec une interprétation de la réponse impulsionnelle comme fonction mémoire (fonction du temps écoulé).

En effet, supposant que la part de la déformation du barreau considéré à l'instant actuel t_0, due à la contrainte $\sigma(t)$ exercée à un instant antérieur $t < t_0$ est proportionnel à cette contrainte et à la durée infinitésimal dt durant laquelle elle s'exerce, avec un coefficient de proportionnalité fonction du temps écoulé noté $\psi(t_0 - t)$ (où ψ est une fonction appelée fonction mémoire), et ajoutant toutes ces contributions à la déformation, on obtient la part $\epsilon_P(t_0)$

1. Dans sa version actuelle, l'article de Wikipedia aborde de façon intéressante mais à la marge, en se limitant aux mesures (qui sont des distributions particulières), la notion de produit de convolution des distributions.

de la déformation due au passé :

$$\epsilon_P(t_0) = \int_{t=-\infty}^{t_0} \psi(t_0 - t)\sigma(t)dt \tag{1}$$

La formule obtenue est un cas particulier du produit de convolution des fonctions classiques.

Definition 1. *Étant données f et g deux fonctions $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, leur produit de convolution est, dans la mesure où il est défini, donné par la formule*

$$f * g(t_0) = \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} f(t_0 - t)g(t)dt = \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} g(t_0 - t)f(t)dt.$$

En effet, dans le cas particulier où l'une des fonctions, disons f est causale — c'est-à-dire que son support est inclus dans $\mathbf{R}_+$ —, le produit de convolution s'écrit

$$f * g(t_0) = \int_{t=-\infty}^{t=t_0} f(t_0 - t)g(t)dt. \tag{2}$$

Il faut néamoins aller plus loin. En effet, la formule (1) ne donne pas la déformation complète du barreau visco-elastique, car il y a aussi une déformation instantanée : la fonction mémoire devrait intégrer la mémoire du présent.

La déformation instantanée s'écrivant $k\sigma(t_0)$, où k est un réel (positif) exprimant le coefficient de proportionnalité pour cette déformation (on a supposé le barreau linéaire), on obtient pour expression complète de la déformation

$$\epsilon_P(t_0) = \int_{t=-\infty}^{t_0} \psi(t_0 - t)\sigma(t)dt + k\sigma(t_0) \tag{3}$$

On peut alors se demander s'il est possible d'intégrer la mémoire du présent à la mémoire du passé ψ afin d'obtenir une fonction mémoire généralisée, disons Ψ, de sorte que la déformation s'exprime sous la forme $\epsilon = \Psi * \sigma$.

La réponse à cette question est positive, à condition de représenter la mémoire du présent par une distribution singulière. Il faudra donc élargir la définition 1 et définit le produit de convolution des distributions.

0.2 Systèmes entrées/sorties

L'exemple précédent illustre le fait général suivant : si un système entrée/sortie (toutes deux exprimées par des fonctions du temps $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, disons $a(t)$

pour l'entrée et $b(t)$ pour la sortie) est linéaire (la sortie dépend linéairement de l'entrée) et invariants (pour les translations) dans le temps, alors un tel système est un système de convolution : il existe $s(t)$ tel que $b = a * s$... **à condition** d'utiliser pour s des distributions. Exemple le plus simple : le système qui ne fait rien ($b = a$) est caractérisé par l'élément neutre du produit de convolution. On verra qu'il s'agit du dirac, donc d'une distribution singulière.

En théorie du signal, les systèmes entrées/sorties considérés sont des filtres temporels, mais bien d'autres exemples existent. Par exemple en analyse d'image, on procède à des produits de convolution de fonctions de deux variables spatiales. Dans ce cours, on se limite aux distributions d'une variable réelle.

1 Définition du produit de convolution des distributions

Étant données f et g deux fonctions classiques telles que $f * g$ existent et soit localement intégrables, on observe que pour toute fonction test ϕ on a

$$< f * g, \phi >=< f(u), < g(v), \phi(u + v) >> .$$

Cette formule se généralise aux distributions :

Definition 2. *Sous réserve d'existence, le produit de convolution $S * T$ de deux distributions est la distribution définie par son action sur les fonctions tests, à savoir*

$$< S * T, \phi >=< S(u), < T(v), \phi(u + v) >> .$$

2 Propriétés

2.1 Elément neutre

2.2 Associativité

Sous réserve d'existence des *trois* produits de convolution.

2.3 Commutativité

Sous réserve d'existence.

2.4 Support

$supp(S * T) \subset supp(S) + supp(T)$ (sous réserve d'existence).

2.5 Conditions suffisantes d'existence ; espaces stables

$S \in \mathcal{E}' \Rightarrow S * T$ existe.
Définition : distribution causale.
Le produit de convolution de deux distributions causales existe toujours, et est causal.

2.6 Produit de convolution et dérivation

Interprétation de la dérivation comme produit de convolution.
Dérivée première, dérivées $n^{\text{ème}}$ d'un produit de convolution.
Proposition : si $\alpha \in \mathcal{D}$ et $T \in \mathcal{D}'$, alors $\alpha * T \in \mathcal{C}^\infty$.

2.7 Produit de convolution et translation

2.8 Continuité du produit de convolution

Applications. Dérivation et translation d'une suite ou d'une série de distributions.

Suites régularisantes

Table des matières