Supméca 2011-2012
MAPP

TD n°1 du 13 septembre 2011

Tenseurs

1 Tableau récapitulatif

Donner la liste des divers types de tenseurs d'ordre 1 et 2 vus en cours, établir le tableau récapitulatif avec les formules de changement de base.

2 Canonicité du bidual

Définir l'isomorphisme canonique entre en espace vectoriel de dimension finie et son bidual. Vérifier qu'il ne dépend pas du choix d'une base ou d'une structure euclidienne.

3 Dualité et produit scalaire

Qu'est-ce qu'un endomorphisme symétrique ? antisymétrique ?
Définir le gradient d'une fonction numérique différentiable sur $\mathbf{R}^n$

4 Non commutativité du produit matriciel : trouver l'erreur...

Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant.

Considérons un espace vectoriel réel E de dimension n, munissons-le d'une base $(e) = (e_1, \cdots, e_n)$ et considérons un vecteur $u \in E$. Appelons X la matrice-colonne des coordonnées de u dans la base (e), et procédons maintenant à deux changements de bases successifs, à savoir d'abord le changement de base qu'avec des notations évidentes j'écris $p : (e) \to (f)$ suivi du changement de bases $q : (f) \to (g)$. Le changement de base p conduit pour le vecteur u à de nouvelles coordonnées dans la base (f), à savoir $X' = P^{-1}X$, où P désigne la matrice du passage $p : (e) \to (f)$, matrice que l'on peut voir aussi comme la matrice dans (e) de l'endomorphisme de E défini par le passage $(e) \to (f)$ (c'est-à-dire l'endomorphisme défini par les relations $p(e_i) = f_i$). De même, les coordonnées de u dans (g) vérifient $X'' = Q^{-1}X'$, où Q est la matrice du passage $q : (f) \to (g)$. Donc $X'' = Q^{-1}P^{-1}X$, soit $X'' = (PQ)^{-1}X$. Par conséquent, la matrice du passage $q \circ p : (e) \to (g)$ est PQ.

Mais d'un autre coté, la matrice du passage $q \circ p$ doit coïncider avec la matrice dans (e) de l'endomorphisme défini par ce changement de base; or, on sait que les matrices se mutiplient *dans le même ordre* que celui où s'effectue la composition des endomorphismes. La matrice du passage $q \circ p$ est donc QP.

Puisque le changement de bases $q \circ p$ n'a pas deux matrices de passages mais une seule, on en déduit $PQ = QP$.

Par un argument topologique, ce résultat obtenu pour les matrices inversibles se prolonge à toutes les matrices : le produit matriciel est donc commutatif.