

# Introduction à la méthode des différences finies

S. Dugowson

13 février 2012

## Table des matières

### 1 Présentation générale de la méthode

L'objet de la méthode des différences finies est l'obtention de solutions approchées de problèmes aux dérivées partielles (=équations aux dérivées partielles + conditions aux limites ou initiales), en certains points (les nœuds) de leur domaine.

#### 1.1 Principe de la méthode sur un exemple

On considère le problème de la poutre (déjà considéré dans le cours sur les éléments finis), à savoir une équation différentielle sur  $[0, 1]$  avec des conditions aux limites (ce n'est pas un problème de Cauchy !) :

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \\ u(0) = \alpha \\ u(1) = \beta \end{cases}$$

##### 1.1.1 Discrétisation du domaine

Pour  $N$  entier assez grand, on discrétise le domaine avec une finesse qui croît avec  $N$ , finesse pouvant également être associée à une longueur caractéristique  $h$  destinée à tendre vers 0 quand  $N \rightarrow \infty$ .

Dans le cas présent, le plus simple est de réaliser une discrétisation régulière en posant  $h = \frac{1}{N+1}$  et en choisissant les nœuds  $x_k$  définis pour tout  $k \in \{0, \dots, N+1\}$  par

$$x_k = k.h = \frac{k}{N+1}$$

Les bords du domaine  $[0, 1]$ , à savoir 0 et 1, coïncident ici avec  $x_0$  et  $x_{N+1}$ . Les autres nœuds, *i.e.* les  $x_k$  pour  $k \in \{1, \dots, N\}$  sont les *nœuds intérieurs*.

### 1.1.2 Notation adaptée à la discrétisation

Notations  $u_k, c_k, f_k \dots$

### 1.1.3 Approximation des conditions aux limites

Dans le cas présent, on peut écrire exactement

$$\begin{aligned}x_0 &= \alpha \\ x_{N+1} &= \beta\end{aligned}$$

On dit qu'il n'y a pas d'erreur de consistance associée à l'expression des conditions aux limites.

### 1.1.4 Approximation des opérateurs différentiels

**Idée** C'est l'idée essentielle de la méthode des différences finies, et elle est fort simple : la dérivée d'une fonction est la limite d'un taux d'accroissement, en sorte que l'on peut approcher une telle dérivée par un taux d'accroissement, ou quotient de différences finies (*fini* s'oppose ici à *infinitésimal*).

## Approximation d'une dérivée première

## Approximation d'une dérivée seconde

## Obtention des opérateurs aux différences finies par calcul symbolique

### 1.1.5 Ecriture du système linéaire

### 1.1.6 Résolution du système linéaire

Nous ne développerons pas dans ce cours les méthodes de résolution des systèmes linéaires.

Signalons simplement qu'il existe essentiellement deux types de méthodes :

- les méthodes directes (p. ex. la méthode du pivot de Gauss),
- les méthodes itératives.

Parmi les méthodes itératives, on peut notamment classer les méthodes de gradient, très efficaces pour les systèmes dont la matrice est définie positive.

**Description rapide du principe de la méthode du gradient pour le système  $Au = b$**

## 1.2 Les trois concepts fondamentaux

### 1.2.1 Notion de schéma aux différences, formulation et notations

Un problème aux dérivées partielles peut s'écrire

$$Lu = f$$

où l'inconnue est une fonction  $u \in \mathcal{U}$  et  $f$  est une fonction donnée appartenant à un espace  $\mathcal{F}$ .

*Remarque 1.* L'expression  $Lu = f$  inclut non seulement l'équation ou le système d'équations différentielles ou aux dérivées partielles, mais aussi les conditions aux limites et les conditions initiales.

Pour chaque pas de discrétisation spatiale  $h$  (ou de discrétisation temporelle  $\tau$ ) associé à un paramètre entier  $N$  destiné à tendre vers  $+\infty$ , on a des espaces de dimension finie  $\mathcal{U}_h$  et  $\mathcal{F}_h$  (dépendant de façon croissante de  $N$ ), avec le plus souvent  $\dim(\mathcal{U}_h) = \dim(\mathcal{F}_h)$  (dans l'exemple de la poutre,  $\dim(\mathcal{U}_h) = N$ ).

Pour chaque  $h$ , la fonction donnée  $f \in \mathcal{F}$  conduit par restriction aux nœuds du maillage à un vecteur  $f_h \in \mathcal{F}_h$ .

Pour chaque valeur de  $h$ , la fonction inconnue  $u$  sera approchée (en un sens à préciser) par un vecteur  $u_h \in \mathcal{U}_h$ , solution d'une équation en dimension finie

$$L_h u_h = f_h,$$

où  $L_h$  est un opérateur bijectif entre les espaces  $\mathcal{U}_h$  et  $\mathcal{F}_h$ . Dans le cas d'un problème linéaire — i.e.  $L$  est un opérateur linéaire —  $L_h$  sera lui-même une application linéaire, identifiée à une matrice carrée de dimension donnée par la dimension commune des espaces  $\mathcal{U}_h$  et  $\mathcal{F}_h$ . La famille des systèmes linéaires (de dimension croissante)  $L_h u_h = f_h$  constitue ce qu'on appelle un *schéma aux différences* pour le problème  $Lu = f$ .

**Notation**  $[u]_h$  Les notations précédentes sont un peu ambiguës, dans la mesure où il est essentiel, pour comprendre la méthode et étudier la convergence des schémas, de bien distinguer les valeurs aux points  $x_k$  de la fonction  $u$ , solution exacte du problème différentiel, des valeurs approchées données par la méthode, c'est-à-dire les solutions du schéma aux différences.

Précisons donc les notations qui seront employées à partir de maintenant.

Pour une valeur de  $h$  donnée, les valeurs prises aux nœuds  $x_k$  de la solution exacte  $u$  du problème différentiel sont les  $u(x_k)$ , elles forment un vecteur noté  $[u]_h \in \mathbf{R}^{P_N}$ , où  $P_N$  est le nombre de nœuds  $x_k$  pour la valeur de  $h$  considérée.

D'un autre coté,  $u_h \in \mathbf{R}^{P_N} \simeq \mathcal{U}_h$  désigne la solution du schéma. La composante du vecteur  $u_h$  correspondant au nœud  $x_k$  est  $u_h(x_k)$ , et s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la valeur de  $h$ , on la notera souvent  $u_k$ .

Les expressions  $u(x_k)$  et  $u_k$  désigneront donc des quantités distinctes, et on aura

$$u_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{P_N} \end{pmatrix}$$

et

$$[u]_h = \begin{pmatrix} u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_{P_N}) \end{pmatrix}$$

### 1.2.2 Convergence

Une suite dans une suite d'espaces...

Choix de normes cohérentes

Définition de la convergence

### 1.2.3 Consistance

#### **1.2.4 Stabilité**

[avec cette section se termine le cours du 1<sup>er</sup> mars]

### 1.3 Exemple : membrane statique sur un contour

## 1.4 Comparaison entre différences finies et éléments finis



## 2 Problèmes d'évolution

### 2.1 Spécificité des problèmes d'évolution

Dans les problèmes d'évolution, une des dimensions du domaine est le temps.

Du fait que le temps est orienté, les problèmes d'évolution présentent, en relation avec les notions de causalité et de déterminisme, des caractères spécifiques qui se retrouvent également dans les techniques de résolution.

L'idée fondamentale est *grosso modo* que l'on va suivre dans la résolution numérique approchée le déroulement temporel du phénomène. Ainsi, après avoir discrétisé le temps, on cherche la solution approchée d'instant en instant.

### 2.2 Cas d'une équation différentielle du premier ordre

Le principe précédent se traduit très simplement dans le cas des équations différentielles d'ordre 1 (mais rappelons que toute équation différentielle « normale » peut se ramener à une équation différentielle d'ordre 1 en augmentant la dimension de l'espace où la fonction inconnue évolue).

Une discrétisation de l'intervalle de temps  $I \subset \mathbf{R}$  en instants  $t_k$  ayant été faite, la méthode d'Euler consiste ainsi à approcher la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t), t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

par la suite de premier terme  $y_0$  vérifiant la récurrence

$$y_{n+1} = y_n + (t_{n+1} - t_n)f(y_n, t_n).$$

La justification de ceci est que si l'on avait des valeurs exactes, l'accroissement de  $y_{n+1} - y_n$  serait donnée par l'intégrale entre les deux instants considérés de  $f(y(t), t)$ ; or  $(t_{n+1} - t_n)f(y_n, t_n)$  est l'aire d'un rectangle qui approche effectivement cette intégrale.

On pourrait raffiner ce résultat en faisant appel à des développements un peu moins limités, donc aux formules de Taylor, mais cela conduit à des formules compliquées, tandis que d'autres méthodes ce sont révélées plus efficaces : les méthodes de Runge-Kutta. Comme vous en aurez l'occasion de l'utiliser dans les TP de MATLAB, je vais maintenant dire quelques mots à ce sujet, en présentant la plus fréquemment utilisée de ces méthodes : RG4, c'est-à-dire la méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4.

### 2.2.1 Complément : méthodes de Runge-Kutta

On considère pour simplifier une discrétisation uniforme du temps, avec  $y_k = k\tau$ , où  $\tau$  est le pas de discrétisation uniforme.

Faire le schéma pour un problème plan ( $y : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ) : après avoir placé  $y_k$ , on représente la vitesse  $v_1 = f(y_k, k\tau)$ , puis de deux façons  $v_2 = f(y_k + \frac{\tau}{2}v_1, (k + \frac{1}{2})\tau)$ , puis de deux façons  $v_3 = f(y_k + \frac{\tau}{2}v_2, (k + \frac{1}{2})\tau)$ , et encore  $v_4 = f(y_k + \tau v_3, (k + 1)\tau)$ , et la récurrence de Runge-Kutta d'ordre 4 est alors définie par la formule

$$y_{k+1} = y_k + \tau \frac{v_1 + 2v_2 + 2v_3 + v_4}{6}$$

## **2.3 Convergence, consistance et stabilité pour les pbms d'évolution**

### **2.3.1 Sur un exemple simple**

### 2.3.2 Formulation canonique

### 2.3.3 Conditions de stabilité

- Remarque. Il y a une différence à faire, même s'il y a des liens, entre :
- la stabilité d'un schéma (en temps fini ou non) lorsque le pas de discrétisation tend vers 0,
  - la stabilité asymptotique (pour une discrétisation donnée) quand le temps d'évolution tend vers l'infini,

**Rappel sur le rayon spectral** Définition du rayon spectral.

Relation entre norme matricielle et rayon spectral

**Deux conditions suffisantes et une condition nécessaire**

## 2.4 Exemple : problème de la chaleur