Supméca 2011-2012
MAPP

TD n°9-10
28 novembre et 6 décembre 2011

Fourier

1. Vrai ou faux ? :
a. La transformée de Fourier d'une distribution peut exister sans que sa transformée de Laplace bilatérale n'existe.
b. La transformée de Laplace d'une distribution causale peut exister sans que sa transformée de Fourier n'existe.
c. La transformée de Fourier d'une distribution causale à support compact est égale à la valeur en $p = 2i\pi\nu$ de sa transformée de Laplace.
d. La transformée de Fourier d'une distribution à support compact $T(x)$ est égale à $< T(x), e^{-2i\pi\nu x} >$.
e. $\mathcal{F}(T(x+x_0))(\nu) = e^{2i\pi\nu x_0}\hat{T}(\nu)$.
f. $\mathcal{F}(T(x-x_0))(\nu) = e^{2i\pi\nu x_0}\hat{T}(\nu)$.
g. $\mathcal{F}(T(x-x_0))(\nu) = e^{-2i\pi\nu x_0}\hat{T}(\nu)$.
h. $\mathcal{F}(e^{2i\pi\nu_0 x}T(x))(\nu) = \hat{T}(\nu-\nu_0)$.
i. $\mathcal{F}(e^{2i\pi\nu_0 x}T(x))(\nu) = \hat{T}(\nu+\nu_0)$.

2. Quelle est la transformée de Fourier de la fonction constante 1 ?

3. **a**. Calculer la transformée de Fourier de la fonction porte $\Pi(x) = 1_{[-1/2,1/2]}$.
b. Calculer la transformée de Fourier de la fonction Λ (fonction continue de support $[-1,1]$, paire, affine sur $[0,1]$, telle que $\Lambda(0) = 1$).
c. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

4. Grâce à la formule exprimant $\mathcal{F}(e^{2i\pi\nu_0 x}T(x))(\nu)$, calculer la transformée de Fourier de la fonction $\sin(\omega x)$.
Calculer ensuite $\mathcal{F}(8\sin^3(2\pi x))(\nu)$.
(On obtient une expression de la forme $a\delta_b + c\delta_d + e\delta_f + g\delta_h$, avec $b < d < f < h$: donner la valeur des coefficients a à h.)

5. Calculer $\mathcal{F}(f)$ avec $f(x) = e^{-\pi x^2}$ (on montrera que $\hat{f}$ vérifie une équation différentielle, conséquence du fait que f vérifie... la même équation).

6. On rappelle (théorème de Dirichlet) que si f est une fonction τ-périodique, continue en un réel t en lequel f admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite, alors

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

où dans la série trigonométrique ci-dessus, appelée série de Fourier de la fonction périodique f, on a posé $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$, les coefficients de Fourier c_n étant donnés par

$$c_n = \frac{1}{\tau} < f_{|[a,a+\tau]}(t), e^{-in\omega t} >$$

où $f_{|[a,a+\tau]} = 1_{[a,a+\tau]} \times f$ est la restriction (plutôt une troncature, d'ailleurs) de f à l'intervalle $[a, a+\tau]$, a désignant un réel quelconque.
6a. Appliquer la formule précédente en $t \in \mathbf{R}$ à la fonction τ-périodique qui coïncide avec $t(\tau - t)$ sur l'intervalle $[0, \tau]$.
6b. Pourquoi et en quel sens a-t-on le droit de dériver par rapport à t la formule ainsi obtenue ?
6c. Dérivant deux fois la série de Fourier en question, et en déduire la magnifique formule suivante :

$$\text{Ш}(t/\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega t}.$$

On remarquera au passage que $\text{Ш}(t/\tau) = \tau \sum_{n\in\mathbf{Z}} \delta_{n\tau}(t)$.
6d. Utiliser la formule précédente pour déterminer $\hat{\text{Ш}}(\nu)$.
(ne pas confondre avec ça[1] : $\text{Ш} \times \hat{\Pi}$.)
6e. Soit maintenant $T = \sum_{k\in\mathbf{Z}} T_0(t - k\tau)$ une distribution τ-périodique, avec T_0 une distribution telle que supp$T_0 \subset [0, \tau]$. Prouver que $\hat{T}(\nu) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n \delta_{n/\tau}$, avec $c_n = \frac{1}{\tau} < T_0, e^{-in\omega t} >$.

7. Montrer que la transformée de Fourier d'une fonction impaire est impaire. En déduire que c'est également le cas pour toute distribution tempérée.

D'après l'exercice 5 du TD 2-3-4 concernant la distribution $vp(1/x)$, on sait que les solutions de l'équation $xT(x) = 1$ sont les distributions de la forme $T(x) = vp(\dfrac{1}{x}) + k\delta$, avec k constante (réelle ou complexe).

On a $H^*(p) = 1/p$. Peut-on en déduire que $\hat{H}(\nu) = \dfrac{1}{2i\pi\nu}$?

1. Voir `http://www.youtube.com/watch?v=f_oEovxpf8s`.

Montrer que $2i\pi\nu\hat{H}(\nu) = 1$. En remarquant que $H - 1/2$ est impaire, en déduire $\hat{H}(\nu)$.