Supméca 2011-2012
MAPP

TD n°6-7-8
8, 15 et 22 novembre 2011

Convolution et Laplace

1 Convolution

1. Quels sont dans la liste ci-dessous les produits de convolution qui existent :

a. $(\delta_{-1}+\delta_1)(x) * \cos(x)$,
b. $(\delta_{-1}+\delta_1)(x) * \cos(x)H(x)$,
c. $\cos(x) * cos(x)$,
d. $cos(x)H(x) * cos(x)H(x)$,
e. $f * g$ avec $f \in L^1$ et g fonction bornée sur $\mathbf{R}$,
f. $H * H$,
g. $1 * 1$,
h. $1 * H$.

2. On admet que, s'il existe, le produit de convolution d'une distribution quelconque par une fonction de classe C^∞ est une fonction continue. Montrer que celle-ci est nécessairement de classe C^∞ elle-même.

On rappelle que la suite $\rho_n(x) = n\rho(nx)$ converge dans $\mathcal{D}'$ vers δ, où $\rho \in \mathcal{D}$ est une fonction positive telle que $\int \rho = 1$. Montrer que l'espace des fonctions de classe C^∞ est dense dans $\mathcal{D}'$.

3. Soit f une fonction de classe C^k. On note Π la fonction caractéristique de l'intervalle $[-1/2, 1/2]$. Montrer que $\Pi * f$ est de classe C^{k+1}. On suppose $f \in L^1$. Montrer que $\int(f * \Pi) = \int f$.

Calculer $\Pi * \Pi$.

4. Calculer $x^2H(x) * x^3H(x)$.

5. Calculer $(\delta_{-1}+\delta_1)^5$.

6. On considère l'équation différentielle suivante

(E) $x'''(t) + 8x''(t) + 17x'(t) + 10x(t) = f(t)$,

où f est une fonction continue donnée, et on y adjoint les conditions initiales : $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$ et $x''(0) = 1$.

On pose $X(t) = x(t)H(t)$ et $F(t) = f(t)H(t)$.

Calculer X', X'' et X'''. Montrer que le problème posé par l'équation (E) et les conditions initiales peut s'écrire sous la forme $T * X = G$, avec pour T une distribution de support $\{0\}$ et G une distribution causale.

7. On considère la même équation différentielle que dans l'exercice précédent, et on suppose cette fois que la fonction f est dans L^1. On s'intéresse aux solutions de cette équation qui sont elles-mêmes L^1. Montrer que le problème peut s'écrire sous la forme $T * x = f$ et que, sous réserve d'existence, il y a unicité.

2 Laplace

1. Rappeler les principales formules.

2. On appelle fonction de transfert la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle d'un système. Pour un assemblage en série (resp. en parallèle), comment se composent les fonctions de transfert de modèles visco-élastiques linéaires (sans masse) ?

Quelles sont les relations entre fonction de transfert, transformée de Laplace de la fonction de fluage, transformée de Laplace de la fonction de relaxation ?

Déterminer les fonctions de fluage et de relaxation pour l'assemblage en parallèle d'un ressort idéal de raideur k et d'un amortisseur de viscosité μ.

3. Utiliser la transformée de Laplace pour résoudre les problème d'équation différentielle de la section précédente.