

Supméca 2011-2012  
MAPP

**TD n°2-3-4**  
**27 septembre, 4 et 11 octobre 2011**

**Distributions**

**Table des matières**

<b>1</b>	<b>Définition</b>	<b>2</b>
1.1	Fonctions test . . . . .	2
1.2	Heaviside, etc. . . . .	2
1.3	Dirac, etc. . . . .	2
1.4	Fonction inverse . . . . .	2
1.5	Séries . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Support</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Régularité</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Dérivation</b>	<b>3</b>
4.1	Heaviside $H$ . . . . .	3
4.2	Parité . . . . .	3
4.3	Support . . . . .	3
4.4	Produit . . . . .	3
4.5	Quelques calculs de dérivées . . . . .	4
4.6	Distributions constantes . . . . .	4
<b>5</b>	<b>Valeur principale de <math>1/x</math></b>	<b>4</b>
<b>6</b>	<b>Suites de distributions</b>	<b>5</b>
<b>7</b>	<b>Séries</b>	<b>5</b>
<b>8</b>	<b>Rappel du plan du cours du 22 septembre 2011, références</b>	<b>5</b>
<b>9</b>	<b>Références</b>	<b>6</b>

# 1 Définition

## 1.1 Fonctions test

1 Montrer que l'espace  $\mathcal{D}$  des fonctions de classe  $C^\infty$  à support compact n'est pas réduit à la fonction nulle, en donnant explicitement un exemple de fonction non nulle appartenant à  $\mathcal{D}$ .

2 Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Les suites suivantes convergent-elles (simplement, uniformément, dans  $\mathcal{D}$ ?) :  $\frac{1}{n}\varphi(x)$ ,  $\varphi(x+n)$ ,  $\frac{1}{n}\varphi(\frac{x}{n})$ .

## 1.2 Heaviside, etc.

L'application  $H : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $H(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(t)dt$  est-elle une distribution ?

L'application  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $T(\varphi) = \int_{-\infty}^\infty t^2 \varphi(t)dt$  est-elle une distribution ?

L'application  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $T(\varphi) = \int_{-\infty}^\infty \varphi^2(t)dt$  est-elle une distribution ?

L'application  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $T(\varphi) = \sup_{\mathbf{R}} \varphi(t)$  est-elle une distribution ?

## 1.3 Dirac, etc.

L'application  $\delta : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $\delta(\varphi) = \varphi(0)$  est-elle une distribution ?

L'application  $\delta' : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $\delta'(\varphi) = -\varphi'(0)$  est-elle une distribution ?

## 1.4 Fonction inverse

La fonction inverse  $1/x : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  définit-elle une distribution ?

Même question pour la fonction  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{|x|}}$

## 1.5 Séries

Utiliser la définition des distributions pour décider si les formules suivantes définissent ou non des distributions ?

$$\varphi \mapsto \sum_{n \in \mathbf{Z}} \varphi(n)$$

$$\varphi \mapsto \sum_{n \in \mathbf{N}} \varphi^{(n)}(n)$$

## 2 Support

Quel est le support de la distribution  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $f(x) = 0$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 1$  ?

Quel est le support de la distribution régulière définie par la fonction sin.  
Quel est le support des distributions définies aux questions 1.2, 1.3, 1.4, 1.5.

## 3 Régularité

Préciser pour chacune des distributions considérée à la section 2 s'il s'agit d'une distribution régulière ou d'une distribution singulière.

## 4 Dérivation

### 4.1 Heaviside $H$

Déterminer la dérivée de la fonction d'Heaviside  $H = 1_{\mathbf{R}_+}$ .

### 4.2 Parité

Prouver que la dérivée d'une distribution paire (resp. impaire) est impaire (resp. paire).

### 4.3 Support

Prouver que la dérivée d'une distribution dont le support est réduit à un point est elle-même réduit à un point.

### 4.4 Produit

Prouver la règle donnée en cours de dérivation d'un produit d'une distribution par une fonction de classe  $C^\infty$ .

## 4.5 Quelques calculs de dérivées

Déterminer la dérivée des distributions suivantes.

- 1  $f(x) = \cos(x)H(x)$ .
- 2  $T(x) = xH(x)$ .
- 3  $T_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}H(x)$
- 4  $T(x) = x\delta(x)$ .

## 4.6 Distributions constantes

On dit qu'une distribution est constante si elle est de la forme  $T_f$  avec  $f$  une fonction constante. Prouver qu'une distribution a une dérivée nulle (si et) seulement si elle est constante.

## 5 Valeur principale de $1/x$

On aborde ici le problème soulevé par la question 1.4.

- 1 Expliquer pourquoi la fonction  $x \mapsto 1/x$  ne peut pas s'interpréter comme une distribution.
- 2 Expliquer pourquoi la fonction  $x \mapsto \ln|x|$  peut s'interpréter comme une distribution régulière, qui sera notée  $L$  dans la suite.
- 3 On note  $V$  la dérivée de  $L$ . Montrer que

$$\langle V, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right\}$$

- 4 Déterminer l'ensemble des distributions  $T$  vérifiant l'équation

$$xT(x) = 1.$$

Pour cela, on commencera par résoudre l'équation  $xT(x) = 0$ , en s'appuyant sur le résultat suivant, que l'on admettra : si  $\phi$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$

telle que  $\phi(0) = 0$ , alors le prolongement par continuité en 0 de la fonction définie sur  $\mathbf{R}^*$  par  $\psi(x) = \phi(x)/x$  est une fonction elle-même  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbf{R}$ .

## 6 Suites de distributions

Pour chacune des suites suivantes dire s'il y a convergence, et en quel sens.

- 1 Étant donnée  $\varphi \in \mathcal{D}$ , que peut-on dire des suites  $\frac{1}{n}\varphi(x)$ ,  $\varphi(x+n)$ ,  $\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$  ?
- 2 Étant donnée  $\rho \in \mathcal{C}^1$ , de support inclus dans  $[-1, 1]$ , positive, vérifiant  $\int \rho = 1$ , que peut-on dire de la suite  $n^2\rho'(nx)$  ?
- 3  $\cos(nx)$ .

## 7 Séries

Reprendre les questions de la section 1.5 à la lumière de la partie du cours consacrée aux séries de distributions.

## 8 Rappel du plan du cours du 22 septembre 2011

0 Motivation

1 Définition des distributions

1.1 Un espace de fonctions test

1.2 Représentation des fonctions continues

1.3 Notion de fonction localement intégrable

1.4 Représentation des fonctions localement intégrables

1.5 Dualité algébrique/dualité topologiques

1.6 Topologie séquentielle de  $\mathcal{D}$

1.7 Définition des distributions de la variable réelle

1.8 Exemples de distributions

1.9 Injection des fonctions localement intégrables dans l'espace des distributions

1.10 Distributions régulières, distributions singulières

2 Opérations sur les distributions

- 2.1 Un espace vectoriel topologique
- 2.2 Support
- 2.3 Translation
- 2.4 Transposition
- 2.5 Changement d'échelle
- 2.6 Produit par une fonction régulière
- 2.7 Dérivée des distributions
- 3 Suites et séries de distribution
- 4 Distributions à support compact

## 9 Références

*Distribution et transformée de Fourier*, F. Roddier, Ediscience, 1971.  
*L'outil mathématique (Enseignement de la physique)*, R. Petit, Masson,  
1995

Sur internet :

Lotfi Belkoura, *Introduction aux distributions*.

Olivier Rioul : *Théorie des distributions, transformée de Fourier et convolution*.

Thomas Cluzeau, *Mathématiques pour l'ingénieur*.