Mathématiques pour non scientifiques
Topologie

S. Dugowson

12 décembre 2010

Voici les définitions, exemples et propositions qui ont été présentées dans le cours (mais pas nécessairement dans cet ordre) et qui peuvent faire l'objet d'une interrogation.

1 Prétopologie

1.1 Adhérences prétopologiques

1.1.1 Définition

Définition 1. *Une adhérence prétopologique sur un ensemble E est une application $\alpha : \mathcal{P}E \to \mathcal{P}E$ telle que*
- $\alpha(\emptyset) = \emptyset$,
- *Pour toute partie A de E, $A \subset \alpha(A)$.*

Exemple intuitif : E est un ensemble de personnes, et pour tout sous-ensemble A de E formé de personnes décidées à réunir un maximum de monde, $\alpha(A)$ désigne l'ensemble des personnes qu'ils réussissent effectivement à réunir. Dans cet exemple, on remarque que l'union ne fait pas la force, car il peut y avoir des individus dont la présence dans A aura un effet dissuasif.

1.1.2 Exemples

Exemple 1. Adhérence grossière α_G sur E : si A est non vide, $\alpha_G(A) = E$.

Exemple 2. Adhérence discrète α_D sur E : $\alpha_D(A) = A$.

Exemple 3. Adhérence usuelle sur $\mathbf{R}$: $\bar{A} = \alpha(A)$ est l'ensemble des limites possibles de suites d'éléments de A. Cette notion est présentée sur divers exemples, en particulier : adhérence usuelle d'intervalles ouverts, fermés, semi-ouverts ; adhérence d'un point ; adhérence de $\mathbf{Q}$.

1.1.3 Treillis des adhérences

La notion d'adhérence plus ou moins fine est présentée. L'ensemble des structures prétopologiques s'ordonne alors entre l'adhérence la plus fine (la discrète) et la moins fine (la grossière).

La notion de treillis n'est pas présentée en tant que telle.

1.1.4 Continuité

Définition 2. *Une application f d'un espace prétopologique (E, α) vers un autre (F, β) est dite continue si pour tout point $a \in E$ et toute partie A de E, si $a \in \alpha(A)$ alors, nécessairement, $f(a) \in \beta(f(A))$.*

Contre-exemple : on prouve que la fonction d'Heaviside $H(x) = 1_{[0,+\infty[}$ n'est pas continue.

1.1.5 Fermés prétopologiques

Définition 3. *Une partie d'un espace prétopologique est dite fermée lorsqu'elle est égale à son adhérence.*

Remarque : la partie vide et la partie pleine sont toujours fermées.

1.2 Intérieurs prétopologiques

On note $\neg A$ le complémentaire de A (dans l'espace de travail E).

Définition 4. *Un opérateur d'intérieur prétopologique sur E est une application $\iota : \mathcal{P}E \to \mathcal{P}E$ telle que*
- *$\iota(E) = E$,*
- *Pour toute partie A de E, $\iota(A) \subset A$.*

Proposition 1. *Soit E un ensemble. Pour tout opérateur d'adhérence prétopologique α, l'opérateur $\neg\alpha\neg$ est un opérateur d'intérieur prétopologique, et l'application $\alpha \to \neg\alpha\neg$ est une bijection de l'ensemble des adhérences prétopologiques dans celui des intérieurs prétopologiques sur l'ensemble E considéré.*

1.3 Frontières prétopologiques

Définition 5. *Etant donné un espace prétopologique (E, α, ι), la frontière d'une partie A de E est $\varphi(A) = \alpha(A) \cap \alpha(\neg A)$.*

Proposition 2. $\varphi(A) = \alpha(A) \setminus \iota(A)$.

2 Topologie

2.1 Introduction à la notion de catégorie

Objets, flèches, composition des flèches compatibles.

La catégorie des ensembles, la catégories des espaces prétopologiques. Foncteur d'oubli. La catégorie des espaces topologique sera une sous-catégorie de celle des espaces prétopologiques.

2.2 Adhérences topologiques

2.2.1 Définition

Définition 6. *Une adhérence prétopologique est dite* topologique *si elle vérifie en plus les propriétés suivantes :*

- $\alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cup \alpha(B)$,
- $\alpha \circ \alpha = \alpha$.

2.2.2 Exemples

Les prétopologies discrète et grossière sont des topologies.

L'adhérence usuelle sur $\mathbf{R}$ est une adhérence topologique.

2.2.3 Treillis des adhérences topologiques

L'ensemble des adhérences topologiques sur un ensemble donné constitue un ensemble ordonné partiellement entre la topologie discrète et la topologie grossière. En fait, c'est un treillis complet (ce point n'est pas développé).

2.3 Fermés topologiques

Définition 7. *On dit qu'un ensemble $\mathcal{F}$ de parties de E est un ensemble possible de fermés topologiques s'il vérifie les propriétés suivantes :*

- $\emptyset \in \mathcal{F}$,
- *l'union de deux fermés quelconque est un fermé,*
- *l'intersection d'une famille quelconque de fermés est un fermé.*

Remarque 1. En particulier, l'intersection de la famille vide est un fermé, autrement dit l'espace entier E est toujours un fermé de E : pour tout ensemble possible de fermés $\mathcal{F}$, on a $E \in \mathcal{F}$.

Théorème 3. *Une structure topologique peut être caractérisée aussi bien par son opérateur d'adhérence que par l'ensemble des parties fermées. Plus* *précisément, il existe une bijection « naturelle », pour tout ensemble de points, entre l'ensemble des opérateurs d'adhérence et l'ensemble des familles de fermés : à tout opérateur d'adhérence on associe l'ensemble des parties fermées, et réciproquement à tout ensemble de parties fermées on associe la « fermeture »(i.e. le plus petit fermé contenant la partie considérée).*

Ce théorème a été en grande partie démontré en cours.

2.4 Ouverts topologiques

Définition 8. *On dit qu'un ensemble $\mathcal{T}$ de parties de E, dont les éléments seront appelés les* ouverts*, est une topologie sur E s'il vérifie les propriétés suivantes :*
- *$E \in \mathcal{T}$,*
- *l'intersection de deux ouverts quelconques est un ouvert,*
- *l'union d'une famille quelconque d'ouverts est un ouvert.*

Remarque 2. En particulier, l'union de la famille vide est un ouvert, autrement dit la partie vide de E est toujours un ouvert de E : pour toute topologie $\mathcal{T}$, on a $\emptyset \in \mathcal{T}$.

On vérifie facilement que la donnée d'un ensemble possible de parties fermées sur E équivaut à celle d'une topologie sur E. Finalement, une topologie sur E peut, de façon équivalente, être définie
- par son adhérence topologique,
- par son ensemble de fermés topologiques,
- par son ensemble d'ouverts (= sa topologie),
- par son intérieur topologique.

2.4.1 Continuité par les ouverts

Proposition 4. *Une application est continue si et seulement l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert.*

2.5 Frontières topologiques

Exemples : frontières d'intervalles ou de réunions d'intervalles ; frontière de $\mathbf{Q}$.

Proposition 5. *Une partie est à la fois ouverte et fermée si et seulement si sa frontière est vide.*

Cette proposition a été amenée à l'occasion d'une réflexion sur la terminologie des *ouverts* et des *fermés* en topologie : comment se fait-il que contrairement à une porte, une partie de E puisse être ni ouverte, ni fermée, ou parfois à la fois ouverte et fermée ? On a donc appelé *porte* d'une partie A de E tout élément de la frontière de A. Et on dit qu'une porte de A est ouverte si elle n'appartient pas à A, et qu'elle est fermée si elle appartient à A. On a alors le résultat suivant : une partie A de E est ouverte si et seulement si toutes ses portes sont ouvertes, et elle est fermée si toutes ses portes sont fermées. En particulier, une partie sans porte est à la fois ouverte et fermée, tandis qu'une partie dont certaines portes sont ouvertes et d'autres fermées n'est ni ouverte ni fermée.

2.5.1 Connexité

Proposition 6. *(admise) Les seules parties de* $\mathbf{R}$ *(topologie usuelle) à la fois ouvertes et fermées sont la partie vide et la partie pleine.*

Proposition 7. *Tout connexe rencontrant une partie et son complémentaire en rencontre la frontière.*

Dans le langage des portes et des salles :

Proposition 8. *Toute connection entre une salle et son dehors passe par une de ses portes. Lorsqu'une salle n'a pas de porte, dehors et dedans sont déconnectés.*

2.6 Espaces métriques et espaces non séparés

2.7 espaces métriques

2.7.1 métrique discrète

2.7.2 Espaces de Banach et vectoriels normés

2.7.3 Espaces hilbertien et euclidiens

2.7.4 Espaces ultra-métriques

2.8 Espaces non séparés

2.8.1 Topologie de Zariski

Table des matières