Mathématiques

Énoncé

(7 pages)

Supméca 2010/2011
15 décembre 2010

Instructions

Ni calculatrices, ni documents.

Durée de l'examen : 2h30.

Les questions sont numérotées de **1** à **20**. A chacune d'elle correspond une ligne du tableau de la feuille de réponse, sur laquelle les étudiants cochent la ou les cases dont le code de colonne (lettre entre '**a**' et '**h**') correspond aux réponses proposées. Pour certaines questions, il faut non pas cocher mais écrire les résultats demandés dans les cases indiquées.

Notions tensorielles

Dans les questions de cette partie, X désigne un espace vectoriel réel de dimension finie, et constitue l'espace de travail (espace primal).

1. Un vecteur, c'est-à-dire un élément de X, est un tenseur a fois covariant et b fois contravariant, un endormorphisme de X est un tenseur c fois covariant et d fois contravariant, une forme linéaire est un tenseur e fois covariant et f fois contravariant, une forme bilinéaire est un tenseur g fois covariant et h fois contravariant, avec pour a, b,... h les valeurs que vous écrirez dans les cases correspondantes **a**, **b**, **c**, ... **h**.

2. Pour une forme bilinéaire définie sur X, de matrice Q dans une base donnée, un changement de base de matrice de passage P conduit pour ladite forme bilinéaire à une nouvelle matrice donnée par :

a. $P^{-1}QP$
b. $Q^{-1}PQ$
c. ${}^tPQP$
d. ${}^tQPQ$

e. PQP^{-1}
f. QPQ^{-1}
g. $PQP^{-1}Q^{-1}$
h. Aucune des formules précédentes n'est correcte.

Généralités sur les distributions

3. La fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = -1$ si $x < 2$ et $f(x) = e^x$ si $x \geq 2$ (on peut cocher plusieurs cases) :

a. n'est pas une distribution car elle n'est pas continue,
b. n'est pas une distribution car elle croit trop rapidement au voisinage de $+\infty$,
c. est une distribution car elle est linéaire et continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$,
d. est une distribution car elle est de classe C^∞ à support compact sur $\mathbf{R}$,
e. est une distribution régulière, mais pour d'autres raisons,
f. est une distribution singulière, mais pour d'autres raisons,
g. n'est pas une distribution, mais pour d'autres raisons,
h. aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

4. La fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui à tout réel x associe $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbf{Q}$ et $f(x) = 1$ si x est rationnel (on peut cocher plusieurs cases) :

a. n'est pas une distribution car elle est discontinue en tout point,
b. n'est pas une distribution car elle n'est pas localement intégrable,
c. est une distribution car elle est bornée sur $\mathbf{R}$,
d. est une distribution car elle est de classe C^∞ à support compact sur $\mathbf{R}$,
e. est une distribution régulière, mais pour d'autres raisons,
f. est une distribution singulière, mais pour d'autres raisons,
g. n'est pas une distribution, mais pour d'autres raisons,
h. aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

5. La fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui à tout réel x associe $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$:

a. n'est pas une distribution car elle admet une asymptote verticale en 0
b. n'est pas une distribution car elle n'est pas localement intégrable,

c. est une distribution car elle est bornée sur $\mathbf{R}$,
d. est une distribution car elle est de classe C^∞ sur son domaine de définition,
e. est une distribution régulière, mais pour d'autres raisons,
f. est une distribution singulière, mais pour d'autres raisons,
g. n'est pas une distribution, mais pour d'autres raisons,
h. aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

6. La fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui à tout réel x associe $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$:

a. n'est pas une distribution car elle admet une asymptote verticale en 0
b. n'est pas une distribution car elle n'est pas localement intégrable,
c. est une distribution car elle est bornée sur $\mathbf{R}$,
d. est une distribution car elle est de classe C^∞ sur son domaine de définition,
e. est une distribution régulière, mais pour d'autres raisons,
f. est une distribution singulière, mais pour d'autres raisons,
g. n'est pas une distribution, mais pour d'autres raisons,
h. aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

7. Etant donnée une distribution T de la variable réelle, sa dérivée au sens des distributions :

a. n'est définie que si T est régulière,
b. n'est définie que si T est une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$,
c. est toujours définie, aussi singulière soit-elle,
d. est définie pour certaines distributions singulières comme le Dirac, mais n'est pas définie pour n'importe quelle distribution singulière,
e. aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

Par ailleurs, le produit d'une distribution par une autre n'est pas toujours défini :

f. c'est vrai, un tel produit n'est pas toujours défini, par exemple $\delta \times \delta$ n'a pas de sens,
g. c'est faux, le produit de deux distributions est toujours défini, par exemple $\delta \times \delta$ est égal à δ, élément neutre du produit.

Produit de convolution

On rappelle l'usage qui veut que, dans l'écriture, le produit des fonctions est prioritaire sur le produit de convolution, de sorte que, par exemple, $f(x)H(x) * g(x)H(x) = (f(x)H(x)) * (g(x)H(x))$.

8. Cocher les cases, s'il y en a, pour lesquelles le produit de convolution indiqué existe effectivement :

a. $(\delta_{-1} + \delta_1)(x) * \cos(x)$,
b. $(\delta_{-1} + \delta_1)(x) * \cos(x)H(x)$,
c. $\cos(x) * cos(x)$,
d. $cos(x)H(x) * cos(x)H(x)$,
e. $f * g$ avec $f \in L^1$ et g bornée sur $\mathbf{R}$,
f. $H * H$,
g. $1 * 1$,
h. $1 * H$.

9. Parmi les égalités suivantes, cocher les cases de celles qui sont effectivement satisfaites :

a. $(1 * \delta') * H = 1 * (\delta' * H)$,
b. $H * \delta' = \delta$,
c. $H(x) * \cos(x)H(x) = \sin(x)H(x)$,
d. $(S * T)' = S' * T'$ (si existence),
e. $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$,
f. $\delta_a * T(x) = T(x + a)$,
g. $\delta_a * T(x) = T(x - a)$,
h. $1 * \delta' * H = 0$

10. Calculer la fonction suivante, et écrire le résultat (<u>et uniquement le résultat</u>) sous la forme la plus simple possible dans la case prévue à cet effet :

$$x^2 H(x) * x^3 H(x).$$

(Indice : on pourra déterminer d'abord $\dfrac{x^2}{2}H(x) * \dfrac{x^3}{6}H(x)$.)

Laplace et Fourier

11. Cocher les cases correspondant à des formules exactes :
a. $\mathcal{L}(\delta) = 0$
b. $\mathcal{L}(\delta) = 1$
c. $\mathcal{L}(\delta) = H$
d. $\mathcal{L}(T(t))(p) =< T(t), e^{-pt} >$
e. $\mathcal{L}(T(t))(p) =< T(t), e^{pt} >$
f. $\mathcal{L}(T^{(k)}(t)) = (-p)^k \mathcal{L}(T(t))(p)$
g. $\mathcal{L}(T^{(k)}(t)) = p^k \mathcal{L}(T(t))(p)$
h. $\mathcal{L}(T^{(k)}(t)) = \mathcal{L}(T(t))(p-k)$

12. L'original de Laplace de p^n est (cocher une case) :
a. $H^{(n)}$
b. δ_n
c. $\frac{1}{t^n} H(t)$
d. $\frac{t^n}{n!} H(t)$
e. $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} H(t)$
f. $\delta^{(n)}$
g. $cos(\omega t - \phi)$
h. Aucune des réponses précédentes.

13. L'original de Laplace de $\frac{1}{p^n}$ est (cocher une case) :
a. $H^{(n)}$
b. δ_n
c. $\frac{1}{t^n} H(t)$
d. $\frac{t^n}{n!} H(t)$
e. $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} H(t)$
f. $\delta^{(n)}$
g. $cos(\omega t - \phi)$
h. Aucune des réponses précédentes.

14. Pour cette question, cochez toutes les cases qui correspondent à une formule juste.
a. $\mathcal{L}(t^n T(t))(p) = T^{*(n)}(p)$
b. $\mathcal{L}(t^n T(t))(p) = T^{n(*)}(p)$
c. $\mathcal{L}((-t)^n T(t))(p) = T^{*(n)}(p)$
c. $\mathcal{L}((-t)^n T(t))(p) = T^{n(*)}(p)$
e. $\mathcal{L}(T(t-t_0))(p) = e^{-pt_0} T^*(p)$
f. $\mathcal{L}(T(t-t_0))(p) = e^{pt_0} T^*(p)$

g. $\mathcal{L}(e^{p_0 t}T(t))(p) = T^*(p+p_0)$
h. $\mathcal{L}(e^{p_0 t}T(t))(p) = T^*(p-p_0)$

15. L'original de Laplace de $\dfrac{1}{(p-p_0)^n}$ est :

a. $e^{p_0 t}\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}H(t)$
b. $e^{-p_0 t}\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}H(t)$
c. $e^{-p_0 t}\dfrac{t^{n}}{n!}H(t)$
d. $e^{p_0 t}\dfrac{t^{n}}{n!}H(t)$

16. Cocher les cases correspondant à des affirmations ou des formules exactes :

a. La transformée de Fourier d'une distribution peut exister sans que sa transformée de Laplace bilatérale n'existe.
b. La transformée de Laplace d'une distribution causale peut exister sans que sa transformée de Fourier n'existe.
c. La transformée de Fourier d'une distribution causale à support compact est égale à la valeur en $p = 2i\pi\nu$ de sa transformée de Laplace.
d. $\mathcal{F}(T(x+x_0))(\nu) = e^{2i\pi\nu x_0}\hat{T}(\nu)$.
e. $\mathcal{F}(T(x-x_0))(\nu) = e^{2i\pi\nu x_0}\hat{T}(\nu)$.
f. $\mathcal{F}(T(x-x_0))(\nu) = e^{-2i\pi\nu x_0}\hat{T}(\nu)$.
g. $\mathcal{F}(e^{2i\pi\nu_0 x}T(x))(\nu) = \hat{T}(\nu-\nu_0)$.
h. $\mathcal{F}(e^{2i\pi\nu_0 x}T(x))(\nu) = \hat{T}(\nu+\nu_0)$.

17. Utiliser la formule exprimant $\mathcal{F}(e^{2i\pi\nu_0 x}T(x))(\nu)$ pour calculer la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto \cos x$. Écrire le résultat obtenu, sous la forme la plus simplifiée et la plus élégante possible.

Equation différentielle : problème de Cauchy

On considère l'équation différentielle suivante
(E) $x'''(t) - 2x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = f(t)$,
où f est une fonction continue donnée, et on y adjoint les conditions initiales : $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$ et $x''(0) = 1$.

On pose $X(t) = x(t)H(t)$ et $F(t) = f(t)H(t)$.

18. Calculer X', X'' et X'''. On obtient pour X''' une expression de la forme $x'''(t)H(t) + \alpha\delta + \beta\delta' + \gamma\delta''$. Ecrire la valeur du coefficient α dans la colonne **a** de la feuille de réponse. Faire de même pour β et γ dans les colonnes **b** et **c**, respectivement.
Le problème posé par l'équation (E) et les conditions initiales peut s'écrire sous la forme $T * X = G$, avec pour T une distribution de support $\{0\}$ et G une distribution causale de la forme

$$G = F + k_1\delta + k_2\delta' + k_3\delta'' + k_4\delta'''$$

Toujours sur la ligne 18, écrire la valeur de k_1 dans la colonne **d**, celle de k_2 dans la colonne **e**, celle de k_3 dans la colonne **f**, celle de k_4 dans la colonne **g**.
19. On calcule $\dfrac{1}{T^*(p)} = \dfrac{1}{30}(\dfrac{a}{p+b} + \dfrac{c}{p+d} + \dfrac{e}{p+f})$, avec $b < d < f$. Ecrire dans les cases correspondantes les valeurs de ces coefficients a à f (attention à bien respecter la relation $b < d < f$).
20. L'original de Laplace de l'expression précédente donne l'inverse de convolution causal V de T (la solution du problème est alors donnée sur $\mathbf{R}_+$ par $X = V * G$). Ecrire la fonction $V(t)$ obtenue sur la ligne 20 de la feuille de réponse.